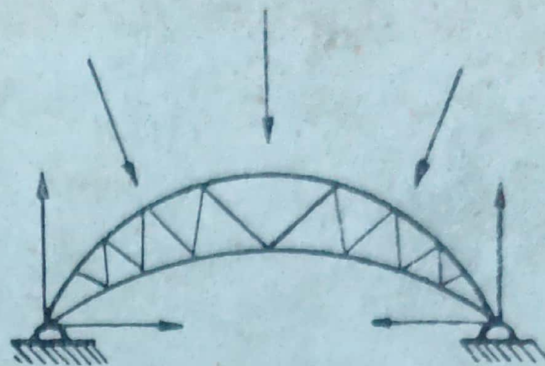
MIHAIL ATANASIU



MECANICA TEHNICĂ

I

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ BUCUREȘTI – 1963

Ing. ATANASIU M.

MECANICA TEHNICĂ

Vol. I

**MANUAL PENTRU ŞCOLILE TEHNICE DE MAIŞTRI
ANUL I ŞI II**

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI – 1963

Manualul a fost elaborat pe baza programei școlare
aprobate de Ministerul Învățămîntului

Referenți :
ing. VOINEA R.
ing. TOMESCU GH.
ing. ROGAI E.
ing. ENACHE ȘTEFĂNIȚĂ

PREFAȚĂ

După cum se arată în raportul prezentat de tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej la cel de-al III-lea Congres al Partidului Muncitoresc Romîn, „Obiectivul principal al planului economic pe anii 1960—1965 este dezvoltarea bazei tehnice-materiale a socialismului, încheierea procesului de făurire a relațiilor de producție socialiste în întreaga economie, în vederea desăvîrșirii construcției socialismului."

În raportul prezentat la sesiunea extraordinară a Marii Adunări Naționale de către tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej din 27 aprilie 1962 se arată că „Obiectivul stabilit la Congresul al III-lea P.M.R. în domeniul transformării socialiste a agriculturii a fost realizat cu aproape patru ani înainte de termen" și astfel „În Republica Populară Romînă socialismul a învins definitiv la orașe și sate."

Pentru continua întărire a economiei noastre socialiste se impune cunoașterea metodelor tehnicii noi, a procedeelor de lucru înaintate, însușirea legilor de bază privind funcționarea diferitelor mașini și agregate, folosite în industrie și agricultură. De aceea, după cum se arată în același raport, „O problemă de însemnătate capitală pentru economie și cultură, care se află în permanență în atenția partidului și statului nostru, este pregătirea de cadre calificate de toate gradele."

La alcătuirea prezentei lucrări ne-am străduit ca ea să corespundă cît se poate de bine acestui scop; pentru aceasta, principalele obiective pe care le-am avut în vedere au fost claritatea și metodica expunerii, precum și orientarea ei pe linia învățăturii marxist-leniniste; prin preocuparea permanentă de a lega de practică noțiunile și teoremele mecanicii, de a prezenta aplicații cu date concrete privind mașinile realizate de industria țării noastre în anii regimului democrat-popular, de a arăta grija Partidului Muncitoresc Romîn pentru mecanizare, automatizare, dezvoltarea tehnicii noi, precum și pentru ocrotirea sănătății și a capacității de muncă a celor ce muncesc, considerăm că vom contribui la pregătirea unor maiștri corespunzători industriei nostre socialiste.

Partea I

GENERALITĂŢI

Capitolul I

NOŢIUNILE FUNDAMENTALE, OBIECTUL, PĂRŢILE MECANICII

1. Obiectul mecanicii

Mecanica este una dintre cele mai vechi ştiinţe, care s-a format pe baza experienţei dobîndite de oameni în ceea ce priveşte mişcarea corpurilor, cu ocazia folosirii forţelor naturii în scopul satisfacerii nevoilor de a construi, de a realiza maşini.

Obiectul mecanicii îl constituie studiul mişcării şi al forţelor care apar în diferitele mecanisme întîlnite în tehnică.

Se consideră o maşină folosită în tehnică, spre exemplu un automobil, şi se analizează modul în care mişcarea şi forţa sînt transmise dintr-o parte în alta a maşinii; astfel, presiunea amestecului de gaze din cilindri acţionînd asupra pistoanelor le pune în mişcare; acestea, la rîndul lor, acţionînd asupra bielei motoare o pun în mişcare, transmiţînd, prin intermediul acesteia forţele şi mişcarea arborelui motor, apoi cutiei de viteze şi roţilor automobilului. Din acest exemplu se observă că atît forţa cît şi mişcarea sînt transmise în acelaşi timp, dintr-o parte în cealaltă a maşinii; transmiterea mişcării şi a forţei nu pot fi separate una de cealaltă.

Există şi cazuri în care forţele care se transmit între diferite corpuri care acţionează unul asupra celuilalt nu pun în mişcare corpurile respective; asemenea cazuri se întîlnesc, spre exemplu

la construcţii : forţele care iau naştere între diferitele corpuri care alcătuiesc o construcţie (cărămizi, grinzi etc.) nu pun în mişcare corpurile respective. Acest caz, în care transmiterea de forţă se face în timp ce corpurile respective se află în repaus, formează un capitol aparte al mecanicii ; el are multe aplicaţii, în special în domeniul construcţiilor şi al instalaţiilor întîlnite în industria chimică, industria petrolului etc.

Din aceste exemple rezultă că elementele fundamentale care formează obiectul de studiu al mecanicii sînt *forţele* transmise între diferitele organe ale unei maşini sau între diferite părţi care alcătuiesc o construcţie, împreună cu *mişcările* pe care le capătă organele respective sub acţiunea forţelor transmise.

Mecanica se află la baza multor discipline tehnice, metodele ei fiind utilizate direct la rezolvarea problemelor ridicate de aceste discipline.

2. Materia şi mişcarea; mişcarea mecanică a materiei

Lumea încojurătoare, întreg universul, este format din materie aflată în mişcare, fără început şi fără sfîrşit.

Materia constituie realitatea obiectivă ; ea există independent de voinţa noastră.

Materia nu poate fi nici creată, nici distrusă ; orice ,,distrugere" a materiei este numai aparentă; în realitate, această ,,distrugere" nu este altceva decît transformarea materiei dintr-o formă în alta, legea conservării materiei fiind o lege absolută, eternă a naturii.

Materia este infinită şi veşnică, avînd un număr infinit de mare de proprietăţi. Rolul oamenilor de ştiinţă şi al tehnicienilor constă în a scoate la iveală mereu noi proprietăţi ale materiei şi a le pune în slujba dezvoltării societăţii, a fericirii şi bunăstării oamenilor.

Cea mai importantă însuşire a materiei este aceea că *ea se mişcă în spaţiu şi în timp*. Mişcarea constituie forma de existenţă a materiei, inseparabilă de aceasta. La fel ca şi materia, mişcarea este veşnică, fără început şi fără sfîrşit ; ea nu poate fi nici creată, nici distrusă.

Mişcarea materiei poate fi observată în lumea înconjurătoare : mişcarea obiectelor pe pămînt, mişcarea planetlor în

jurul Soarelui, mişcarea moleculelor şi a atomilor din interiorul corpurilor, transformările fizice şi reacţiile chimice, transformările biologice (naşterea şi dispariţia speciilor de fiinţe vii), apariţia orînduirilor noi şi dispariţia orînduirilor vechi în societate, toate acestea sînt forme ale mişcării.

Din exemplele de mai sus rezultă că în general prin mişcare se înţelege *orice fel de schimbare, transformare sau dezvoltare de natură fizică, chimică, fiziologică, socială.*

Dintre toate aceste forme ale mişcării, cea mai simplă este *mişcarea mecanică*. Ea constă din *deplasarea corpurilor în spaţiu unele faţă de altele*. Astfel de mişcări se întîlnesc zilnic în jurul nostru : mişcarea unui obiect care cade pe pămînt de la o înălţime oarecare, mişcarea unui vehicul faţă de corpurile înconjurătoare.

Cu studiul sistematic al mişcării mecanice se ocupă *mecanica teoretică*. Ea este una dintre ştiinţele naturii cu aplicaţii foarte largi în tehnică ; astfel, multe discipline, de o deosebită însemnătate pentru activitatea curentă a unui tehnician, ca teoria mecanismelor, rezistenţa materialelor, organe de maşini, au la bază rezultatele mecanicii teoretice.

3. Spaţiul şi timpul

Mişcarea materiei se desfăşoară în spaţiu şi în timp. Fie că este vorba despre mişcarea mecanică a obiectelor, a planetelor sau de reacţiile chimice, transformările biologice sau sociale, ele se desfăşoară întotdeauna într-un *loc* din spaţiu bine determinat şi durează un anumit *timp* care de asemenea poate fi determinat.

Cu ajutorul noţiunilor de spaţiu şi de timp se pot caracteriza întinderea geometrică, dimensiunile corpurilor materiale, precum şi durata fenomenelor care au loc în natură.

Se poate spune deci că *spaţiul este acea formă obiectivă de existenţă a materiei care caracterizează dimensiunile obiectelor materiale.*

Spaţiul întîlnit în mecanică este cel cunoscut din geometrie, avînd trei dimensiuni : lungime, lăţime şi înălţime, şi o întindere nemărginită în toate cele trei direcţii ale acestor dimensiuni.

De asemenea, vom spune că *timpul este acea formă obiectivă de existenţă a materiei care caracterizează durata unui proces*



oarecare, precum și faptul dacă două procese se desfășoară o dată (sînt simultane) sau unul după altul (sînt succesive).

Despre noțiunile de spațiu și timp ne dăm seama pe baza practicii că există independent de voința noastră în realitatea care ne înconjură: trăim în spațiu și timp, în jurul nostru se află diferite corpuri la care ajungem mișcîndu-ne, evenimentele care se petrec în natură și societate au o durată, un eveniment oarecare se petrece fie înaintea altuia, fie după un altul, fie o dată (simultan) cu alt eveniment.

Spațiul și timpul sînt percepute în legătură unul cu altul; astfel, de exemplu, mergînd dintr-un loc într-altul trece un anumit timp.

4. Masa

Noțiunea de masă a apărut în mecanică odată cu cîntărirea corpurilor. Ea s-a dezvoltat apoi paralel cu studiul mișcării planetelor în jurul Soarelui.

Despre masa corpurilor ne dăm seama că există în mod real prin aceea că încercînd să punem în mișcare corpurile din jurul nostru ele opun o rezistență, pe care o cunoaștem din fizică sub denumirea de *inerție*. Această rezistență, împreună cu proprietatea corpurilor de a avea greutate, consituie manifestarea directă a masei ca una dintre proprietățile de bază ale materiei.

În cele ce urmează vom folosi noțiunea de masă atît în statică cît și în dinamică, pentru a caracteriza proprietățile de *greutate* și *inerție* ale materiei.

5. Forța

Să presupunem că avem un corp așezat pe o masă, pe care dorim să-l punem în mișcare în planul mesei (fig. 1.1). Pentru aceasta, vom agăța într-un punct al acestui corp o sfoară de care vom trage. Vom putea astfel să deplasăm corpul în planul mesei în orice direcție dorim. De aici putem trage concluzia că acțiunea exercitată de noi asupra corpului, acțiune pe care o vom denumi *forță*, este aplicată într-un punct al corpului, acționînd de-a lungul unei drepte numită *suportul* sau *linia de acțiune* a forței respective, avînd un anumit *sens* de-a lungul acestei drepte.

Aceste trei elemente (punct de aplicaţie, direcţie şi sens) nu sînt suficiente pentru a caracteriza o forţă. Într-adevăr, să introducem între punctul de prindere al sforii de pe corp şi extremitatea sforii un arc elicoidal; dacă tragem acum din nou de sfoară, vom observa că păstrînd acelaşi punct de aplicaţie, direcţie şi sens al forţei pe care o aplicăm corpului nostru, vom putea trage de sfoară astfel încît arcul elicoidal să se lungească mai mult sau mai puţin. Vom observa cu această ocazie că atunci cînd arcul elicoidal se lungeşte mai mult, efortul muscular depus de noi pentru acţionarea sforii este mai mare; vom spune că, în acest caz, forţa aplicată este mai mare decît în cazul în care arcul se lungeşte mai puţin.

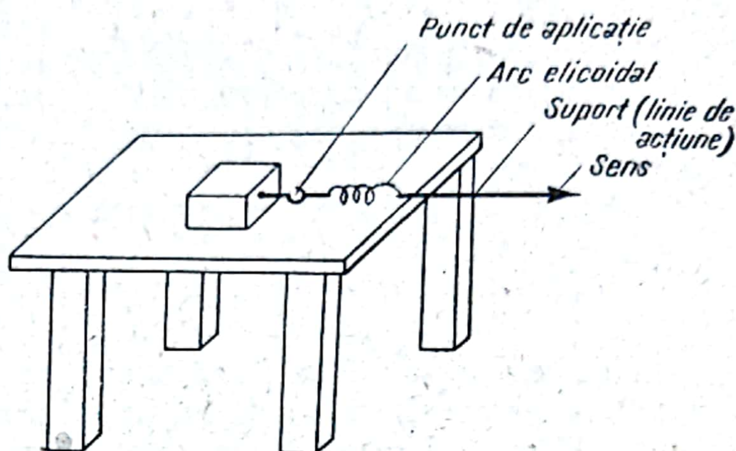


Fig. 1.1.

Rezultă de aici că un alt element important în caracterizarea forţei îl constituie *intensitatea sau modulul său.*

Din cele de mai sus tragem concluzia că forţa este o mărime vectorială (adică o mărime care se reprezintă printr-un vector), care măsoară cel mai simplu mod în care corpurile acţionează unul asupra altuia, şi anume *modul mecanic de acţiune reciprocă*; acest mod se manifestă prin două efecte: *schimbarea poziţiei corpurilor unul faţă de celălalt şi deformarea corpurilor.*

Astfel, acţiunea de atracţie a Pămîntului exercitată asupra corpurilor de la suprafaţa sa poartă numele de greutate; alte asemenea interacţiuni mai sînt: acţiunea apei dintr-un rezervor asupra pereţilor rezervorului, a corpurilor aşezate pe o masă asupra mesei respective etc.

Deformaţiile pe care le capătă corpurile sub acţiunea forţelor ce le sînt aplicate pot fi în anumite cazuri destul de mari şi atunci ele vor fi observate cu uşurinţă; aşa este cazul spre exemplu la întinderea unui şnur de cauciuc, la întinderea sau comprimarea unui arc, la încovoierea unei bare metalice subţiri. În alte cazuri, aceste deformaţii nu sînt perceptibile cu ochiul liber, ci numai cu ajutorul unor instrumente de măsură speciale; aşa este cazul la întinderea unei bare de oţel de secţiune mare, la comprimarea unui bloc de oţel sau de beton etc.

În foarte multe cazuri întîlnite în practică, corpurile capătă sub acțiunea forțelor care le sînt aplicate deformații foarte mici, care pot fi neglijate; din acest motiv, în mecanică, deformația corpurilor se neglijează, introducîndu-se noțiunea de *solid rigid* pentru corpurile la care forțele care sînt aplicate produc deformații neglijabile.

Noțiunea de forță a apărut în mecanică din necesitatea de a măsura într-un mod oarecare efortul muscular pe care-l depune omul pentru a se deplasa dintr-un loc într-altul, pentru a ridica o greutate etc. Ea apărut deci legată de mișcarea mecanică a corpurilor și de aceea a fost privită multă vreme ca o cauză a acestei mișcări. Această definiție a forței ca o „cauză a mișcării" este considerată astăzi ca fiind greșită, deoarece mișcarea nu are nevoie de nici o cauză pentru a se produce.

Odată cu noțiunea de forță, mai apare, după cum se va vedea din cele ce urmează, și o altă noțiune importantă, aceea de *cuplu de forțe*. El este format dintr-o pereche de forțe egale, paralele, de sensuri contrare, situate pe suporturi diferite.

Atît forțele cît și cuplurile nu se pot exercita decît de la un corp către alt corp; ele reprezintă deci acțiunile reciproce sau *interacțiunile* a două corpuri.

Drept interacțiuni prin cupluri putem da ca exemplu interacțiunile rotorului și statorului unei mașini electrice; fiecare din aceste corpuri aplică celuilalt un cuplu. Cuplul aplicat de stator rotorului îl pune pe acesta din urmă în mișcare, iar cuplul aplicat de rotor asupra statorului se transmite fundației motorului.

În tehnică, forțele și cuplurile pe care și le aplică unul altora corpurile din natură, piesele unui mecanism, organele de mașini sînt denumite cu un singur cuvînt *sarcini*.

Forțele și cuplurile care se transmit între două corpuri pot fi clasificate după două mari criterii, și anume:

— după poziția celor două corpuri care acționează unul asupra celuilalt, ele pot fi clasificate în: *sarcini transmise fără ca cele două corpuri să se afle în contact direct și sarcini transmise prin contactul direct al corpurilor*. Din prima categorie fac parte forțele de atracție pe care Pămîntul le exercită asupra corpurilor aflate la suprafața sa (greutatea) și forțele de atracție magnetică dintre două obiecte (un magnet și o bucată de fier), iar din cea de-a doua categorie fac parte forțele care iau naștere între un obiect așezat pe masă și masă, între cilindrul unui motor și gazele care ard în interiorul său, între roțile vehiculelor și sol;

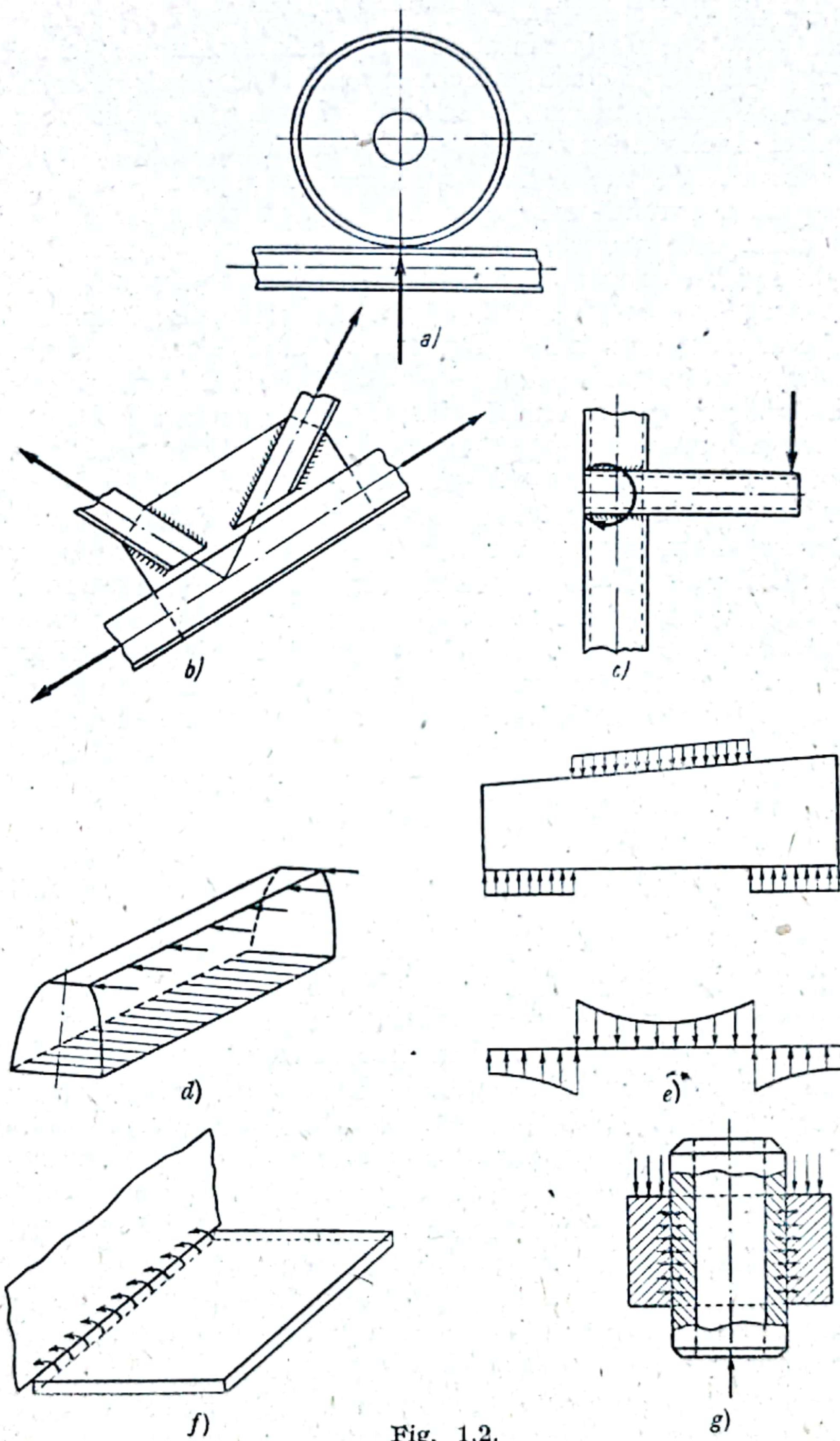


Fig. 1.2.

— după dimensiunile regiunii căreia îi sînt transmise sarcinile (atît cele de la distanţă cît şi cele transmise prin contact direct), ele pot fi clasificate în *sarcini concentrate* şi *sarcini distribuite*. Vom spune că o sarcină (forţă sau cuplu) este concentrată dacă dimensiunile regiunii corpului căruia îi este transmisă sînt atît de mici încît pot fi aproximate printr-un punct; vom spune că o sarcină este distribuită dacă regiunea căreia îi este transmisă este o curbă, o suprafaţă sau un volum. Ca exemple de sarcini concentrate citām forţa transmisă de şină roţii care merge pe ea (fig. 1.2, *a*) forţele transmise într-un nod al unei construcţii metalice (fig. 1.2, *b*), cuplul transmis unei bare de către o altă bară sudată pe ea (fig. 1.2,*c*). Ca exemple de sarcini distribuite pe o curbă citām forţele transmise între dinţii roţilor unui angrenaj (fig. 1.2, *d*), forţele aplicate unei pene care îmbină doi tiranţi cu manşon (fig. 1.2, *e*), cuplurile aplicate laturii unei plăci încastrate într-un zid (fig. 1.2, *f*) ; ca exemple de sarcini distribuite pe suprafaţă citām forţele care iau naştere între două piese fretate (doi cilindri încălziţi şi introduşi forţat unul în celălalt) (fig. 1.2, *g*). Ca exemplu de forţe distribuite pe volum putem considera forţele de greutate ale corpurilor ; întradevăr, în acest caz toate particulele corpului respectiv sînt atrase de Pămînt astfel încît forţa de atracţie se exercită asupra întregului volum al corpului.

6. Caracterul relativ al mişcării mecanice; repausul

Din experienţa zilnică ştim cu toţii că deplasarea, schimbarea poziţiei unui corp în spaţiu, nu poate fi observată decît în raport cu alte corpuri înconjurătoare.

Să presupunem că vagonul unui tren de călători se deplasează pe şină, de la o staţie la alta, transportînd călători şi bagaje. Să mai presupunem că şina de tren este un corp fix în spaţiu.

Să raportăm acum mişcarea corpurilor din vagon pe de o parte la şina pe care se deplasează trenul, iar pe de altă parte la vagonul aflat în mişcare. Despre călătorii care se deplasează în vagon vom spune că se mişcă atît faţă de vagon, cît şi faţă de şină ; este uşor de văzut că aceste două mişcări sînt diferite.

Despre călătorii care stau nemişcaţi în vagon ca şi despre bagaje vom spune că se află în repaus faţă de vagon, dar în mişcare faţă de şină.

Din exemplele de mai sus rezultă că întotdeauna cînd spunem despre un corp că „se mişcă" sau „se află în repaus" trebuie să precizăm imediat şi *faţă de ce corp* este considerată mişcarea sau repausul respectiv.

Corpul sau corpurile la care raportăm mişcarea altor corpuri sînt denumite în mecanică *repere sau sisteme de referinţă*.

Dacă într-un interval oarecare de timp, un corp nu-şi schimbă poziţia faţă de sistemul de referinţă ales, vom spune că el se află în stare de repaus faţă de acel sistem de referinţă, în intervalul respectiv de timp.

Dacă sistemul de referinţă ales este fix, mişcarea şi repausul corpurilor faţă de el vor fi denumite *absolute*; dacă sistemul de referinţă ales se află el însuşi în mişcare, mişcarea şi repausul faţă de el vor fi denumite *relative*.

În natură nu întîlnim repaus absolut deoarece nu există un sistem de referinţă absolut. Astfel, în exemplul dat vagonul se mişcă faţă de şină, şina se mişcă odată cu Pămînt în jurul axei sale şi în jurul Soarelui, iar Soarele se mişcă şi el o dată cu celelalte corpuri din Univers. De aceea, repausul este numei un fenomen relativ, în raport cu anumite sisteme de referinţă. În mecanică vom considera totuşi că anumite sisteme de referinţă sînt: fixe; spre exemplu, în toate aplicaţiile tehnice vom considera Pămîntul drept sistem de referinţă fix, deoarece mişcarea Pămîntului are o influenţă neglijabilă asupra organelor maşinilor.

7. Studiul echilibrului şi mişcării corpurilor de care se ocupă mecanica

Pornind de la datele concrete ale realităţii înconjurătoare, mecanica a creat o serie de *reprezentări simplificate* ale corpurilor din natură. Acest proces ne este cunoscut şi din alte discipline; astfel, avînd la bază realitatea înconjurătoare, geometria a creat reprezentările simplificate de punct, linie dreaptă şi suprafaţă, care uşurează studiul formelor geometrice din natură.

a) **Punctul material**. De multe ori, în studiul mişcării şi echilibrului corpurilor din natură, dimensiunile acestor corpuri nu joacă un rol important. Astfel, spre exemplu, fie că studiem echilibrul unei bile atîrnate de tavan, fie că studiem echilibrul unei lămpi atîrnate în aceleaşi condiţii, rezultatele vor fi ace-

leaşi ; dimensiunile bilei sau ale lămpii nu vor apărea în rezultat. De asemenea vom putea studia mişcarea Pămîntului în jurul Soarelui neglijînd dimensiunile Pămîntului în raport cu distanţele mari existente în Univers, considerînd Pămîntul ca un punct.

Pentru toate aceste situaţii, mecanica a creat noţiunea de *punct material. Punctul material este un punct geometric (corp fără nici o dimensiune) care are concentrată în el o cantitate de materie avînd o anumită masă.* Punctul material nu există deci în mod real în natură, el este o creaţia a mecanicii, o generalizare a tuturor corpurilor ale căror dimensiuni pot fi neglijate în raport cu cele ale corpurilor înconjurătoare ; cu ajutorul noţiunii de punct material, putem reprezenta în calcule în *mod aproximativ* aceste corpuri.

b) **Corpul solid rigid.** După cum am arătat mai sus, în mecanică *se înţelege prin solid rigid un corp a cărui formă şi dimensiuni nu se schimbă oricît de mari* ***ar*** *fi sarcinile exterioare pe care i le-am aplica.* Cu foarte mici excepţii, toate corpurile cu studiul echilibrului şi mişcării cărora se ocupă mecanica sînt considerate solide rigide. Trebuie să observăm de la început că asemenea corpuri nu există în natură ; oricît de dur ar fi materialul din care este confecţionat un corp, acesta se deformează atunci cînd i se aplică din exteriorul său una sau mai multe sarcini. Este adevărat că cu cît materialul din care este alcătuit corpul este mai dur cu atît deformaţiile pe care le suferă corpul respectiv sînt mai mici, de cele mai multe ori imperceptibile cu ajutorul simţurilor noastre, dar totuşi măsurabile cu ajutorul aparatelor de măsurat.

Noţiunea de solid rigid constituie pentru omul de ştiinţă şi pentru tehnician numai o *aproximaţie a corpurilor materiale reale,* care există în natură, aproximaţie justificată tocmai de faptul că aceste deformaţii au în general valori mici. Atunci cînd aproximaţiile rezultate în urma ipotezei rigidităţii corpului devin supărătoare, trebuie luate în consideraţie şi deformaţiile corpului respectiv sub acţiunea sarcinilor exterioare.

c) **Sistemul de corpuri solide rigide**. În natură şi în special în tehnică, se întîlnesc mecanisme şi maşini formate din corpuri solide rigide, care sînt montate şi funcţionează acţionînd unul asupra celuilalt; ele poartă numele de *sisteme de corpuri solide rigide.*

În cele ce urmează, toate aceste trei reprezentări ale mecanicii : punct material, corp solid rigid şi sistem de corpuri solide rigide vor fi denumite pe scurt *sisteme materiale.*

8. Bazele geometrice ale echilibrului şi mişcării

a) **Mărimile geometrice care caracterizează poziţia unui corp în spaţiu.** Orice corp material ocupă la un moment dat un anumit loc sau o anumită poziţie în spaţiu, în raport cu un alt corp ales drept sistem de referinţă. Dacă această poziţie este mereu aceeaşi, adică dacă ea nu se schimbă o dată cu trecerea timpului, spunem despre corpul respecitv că se află în *repaus*; dacă această poziţie este variabilă, adică dacă ea se schimbă o dată cu trecerea timpului, spunem despre corpul respectiv că se află în *mişcare*. Orice corp material are — în general — posibilitatea de a ocupa una sau chiar mai multe poziţii în spaţiu, afară de cazul cînd el este obligat într-un mod oarecare să rămînă solidar cu un alt corp. Toate aceste observaţii pe care le cunoaştem din experienţa zilnică ne conduc în mod firesc la următoarea întrebare: *cum se poate preciza poziţia unui anumit corp în spaţiu* sau, altfel zis, *cu ajutorul căror mărimi se pot deosebi între ele diferitele poziţii ocupate de un acelaşi corp în spaţiu*?

Practica ne arată că mărimile cu ajutorul cărora putem determina în orice moment poziţia unui anumit corp în spaţiu faţă de un sistem de referinţă dat sînt de natură geometrică; mai exact ele sînt *distanţe şi unghiuri*. Să luăm un exemplu: să presupunem că dorim să aşezăm pe o masă orizontală un corp de formă paralelipipedică, astfel încît el să ocupe o anumită poziţie pe această masă (fig. 1.3). Pentru a găsi care sînt mărimile necesare spre a indica poziţia sa procedăm astfel: fixăm mai întîi unul dinte colţurile paralelipipedului (de exemplu vîrful A); aceasta se face cu ajutorul a două numere x şi y măsurate faţă de marginile Ox şi Oy ale mesei, numite *coordonatele* punctului A. Cu aceste două distanţe n-am precizat însă decît numai în parte poziţia paralelipipedului nostru; într-adevăr, păstrînd fix vîrful A şi rămînînd în contact cu una dintre feţele sale pe masă, paralelipipedul se poate roti în jurul muchiei AC, ocupînd astfel o infinitate de poziţii în jurul acestei muchii.

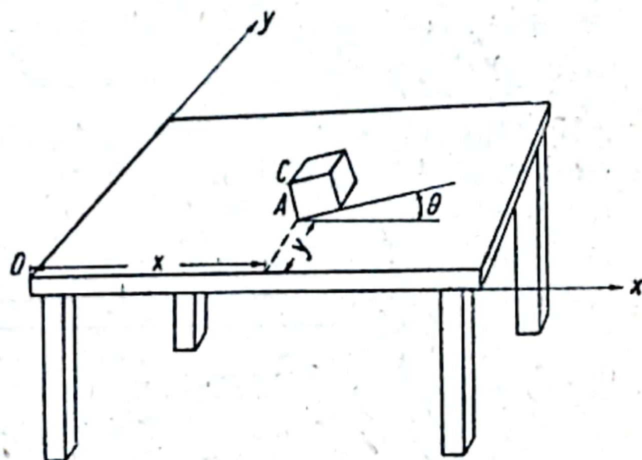


Fig. 1.3.

Mărimea care lipsește pentru a fixa poziția paralelipipedului este un unghi, și anume unghiul θ format de una dintre muchiile sale aflate în contact cu masa și o dreaptă fixă, cum ar fi de exemplu dreapta paralelă cu una dintre laturile mesei, trecînd prin vîrful A al paralelipipedului. Am fixat astfel poziția corpului nostru cu ajutorul a trei mărimi geometrice : distanțele x și y și unghiul θ. După cum se poate observa ușor, dacă se dau valorile mărimilor x, y și θ (unhgiul θ se măsoară în sens trigonometric) se obține o singură poziție a paralelipipedului nostru, și invers: dacă se dă poziția paralelipipedului, putem determina valorile mărimilor x, y și θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 360°)$. Aceasta înseamnă că am reușit să precizăm poziția unui corp cu ajutorul valorior căpătate de anumite mărimi geometrice, care ne indică pozițiile ocupate de corpul respectiv în spațiu. Acest fapt prezintă o importanță deosebită pentru studiul atît al echilibrului cît și al mișcării corpurilor. Într-adevăr, cu ajutorul mărimilor geometrice care determină poziția unui corp putem caracteriza atît starea sa de repaus cît și starea sa de mișcare ; *dacă toate mărimile care determină poziția corpului vor avea anumite valori constante, corpul respectiv se va afla în repaus*; *dacă cel puțin una dintre aceste mărimi va fi o funcție oarecare de timp, corpul se va afla în mișcare.* Caracterul și proprietățile acestor mișcări vor fi studiate în cadrul unui capitol special al mecanicii, *cinematica*.

b) **Mărimi geometrice independente și mărimi geometrice dependente.** Să considerăm acum un alt exemplu : fie o bară

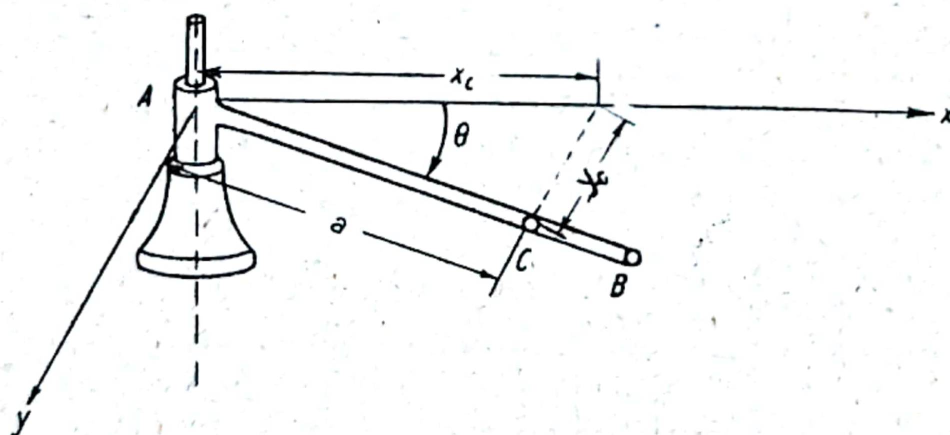


Fig. 1.4.

AB al cărui capăt A este menținut fix (fig. 1.4), bara neputînd executa decît o rotație în jurul unei axe trecînd prin punctul A. Din punct de vedere practic, această mișcare a barei AB

poate fi realizată menținîndu-i fix capătul A cu ajutorul unei legături denumită *articulație*. Este ușor de văzut că pentru determinarea poziției barei AB este necesar un singur parametru: unghiul θ făcut de direcția barei cu o direcția Ax, fixă în planul său. Poziția aceleași bare mai poate fi determinată însă și în modul următor: se alege pe bara AB un punct oarecare, de exemplu punctul C, situat la distanța a de capătul A; cunoscînd coordonatele x_C și y_C ale acestui punct în raport cu un sistem de axe fixe rectangulare xAy, poziția barei este de asemenea determinată. Ne aflăm în fața a două moduri diferite de a caracteriza poziția aceluiași corp; în primul dintre ele, am folosit *o singură mărime geometrică* (unghiul θ), în cel de-al doilea, am folosit *două mărimi geometrice* (distanț elex_C și y_C). Deosebirea esențială dintre aceste două cazuri o constituie faptul că pe cînd în primul caz unghiul θ putea lua valori arbitrare, adică oricărei valori a unghiului θ îi corespunde o poziție bine precizată a barei AB, în cel de-al doilea caz distanțele x_C și y_C nu pot lua valori arbitrare. Într-adevăr, este ușor de văzut că în acest caz ele trebuie să fie legate prin relația:

$$x_C^2 + y_C^2 = a^2. \tag{1.1}$$

Această relație exprimă din punct de vedere geometric faptul că punctul C trebuie să se afle pentru orice poziție a barei pe cercul cu centrul în A, de rază $AC = a$, situat în planul xAy. Orice sistem de valori x_C, y_C care nu respectă relația (1.1) nu poate contribui în nici un fel la precizarea poziției barei AB.

Într-adevăr, dacă distanța AC are valoarea $a = 1$ m, x_C nu poate avea valoarea 1,5 m.

Deoarece între coordonatele x_C și y_C există relația (1.1), ele se numesc *mărimi geometrice neindependente*, spre deosebire de unghiul θ care poate lua orice valori, și care este numit *mărime geometrică independentă*.

c) **Grade de libertate.** În general, poziția unui anumit corp sau a unui sistem de corpuri față de un sistem de referință poate fi precizată cu ajutorul unui număr oarecare de mărimi geometrice independente între ele: fiecărui sistem de valori arbitrare (între anumite limite) ale acestor mărimi îi corespunde o anumită poziție a corpului considerat, bine precizată față de sistemul de referință dat. *Se zice că un sistem material are n grade de libertate dacă poziția sa în spațiu poate fi precizată prin n mărimi geometrice independente.* Astfel, de exemplu paralelipipedul din figura 1.3 are trei grade de libertate, iar bara din figura 1.4 are un singur grad de libertate.

9. Părțile mecanicii

Pentru ușurarea studiului echilibrului și mișcării corpurilor, mecanica se împarte în trei părți, care se ocupă cu rezolvarea mai multor probleme.

Statica se ocupă cu două mari probleme:

— problema reducerii sistemelor de forțe, sau a înlocuirii sistemelor compuse din mai multe forțe, cu alte sisteme mai simple, care produc același efect ca și sistemul inițial;

— problema echilibrului corpurilor, adică a condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească forțele aplicate unui corp pentru ca acesta să fie în echilibru.

Cinematica se ocupă cu studierea mișcării mecanice a corpurilor numai din punct de vedere geometric, fără a ține seama de forțele care le acționează și de masele lor.

Dinamica studiază mișcările corpurilor ținînd seama de forțele care acționează corpurile și de masele acestor corpuri stabilind legătura dintre forțele care acționează un corp și caracterul mișcării sale.

Toate aceste trei părți ale mecanicii prezintă o deosebită importanță pentru diferitele sectoare ale tehnicii.

Partea a II-a

STATICA SISTEMELOR MATERIALE

Capitolul II

PRIMA PROBLEMĂ A STATICII: REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

1. Generalități

În această primă parte a staticii se arată modul în care un sistem de forțe compus dint-un număr oricît de mare de forțe, aplicate unui corp se poate înlocui, fără a-i modifica efectul, cu un alt sistem mai simplu.

Această operație de înlocuire, denumită *reducere*, prezintă o deosebită importanță, deoarece ea dă posibilitatea simplificării problemelor puse de practică, a încadrării lor în cîteva tipuri de probleme simple prin studierea cărora se poate realiza o mare economie de timp.

2. Forța ca vector; reprezentarea și măsurarea forțelor

Prima și cea mai importantă mărime mecanică pe care o întîlnim în statică este *forța*; ea este *o mărime vectorială, care măsoară interacțiunea mecanică a corpurilor din natură*. Datorită acestui fapt, forța se caracterizează printr-un număr de patru elemente, și anume:

— punct de aplicație;
— direcție, adică dreaptă în lungul căreia acționează;
— sens în care acționează pe direcția sa (pe orice direcție există două sensuri);
— modul sau intensitate a forței.

Mărimea matematică cu ajutorul căreia se reprezintă toate mărimile vectoriale din natură este *vectorul*; el se reprezintă grafic printr-o săgeată; originea săgeții reprezintă punctul de aplicație al vectorului, direcția săgeții este direcția vectorului, sensul săgeții este sensul vectorului, iar distanța de la origine la vîrful săgeții reprezintă, la o scară anumită, modulul vectorului (fig. 2.1).

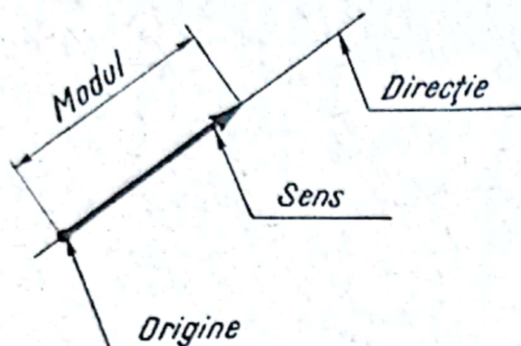


Fig. 2.1.

Pentru a distinge între ele mărimile scalare de cele vectoriale, pe acestea din urmă le vom nota cu o bară deasupra (de exemplu forța $\bar{F}$).

Acțiunile forțelor se întîlnesc pretutindeni în natură; astfel, datorită forței de gravitație corpurile sînt atrase spre centrul Pămîntului, datorită forței vîntului este acționată o moară de vînt sau este pusă în mișcare o corabie cu pînze, datorită forței vaporilor, pistonul unei mașini cu abur este pus în mișcare, datorită forței magnetice a unui magnet o bucată de oțel este atrasă ș.a.m.d.

Simpla constatare calitativă a acestor efecte nu poate fi însă de folos; pentru a măsura efectele forțelor, trebuie măsurate intensitățile lor. Pentru aceasta s-a ales ca unitate greutatea pe care o are 1 dm³ de apă distilată la 4 °C, la nivelul mării și la latitudinea de 45°. Această unitate a fost denumită *kilogram-forță* și notată cu simbolul kgf. în sistemul MKfS.

Pentru măsurare (compararea forțelor cu unitatea de măsură) s-au construit aparate speciale, numite *dinamometre*. Cel mai simplu dinamometru este arătat în figura 2.2. La acest aparat, intensitatea unei forțe este măsurată cu ajutorul deformației unui resort AB, care, în anumite limite, este proporțională cu forțele aplicate.

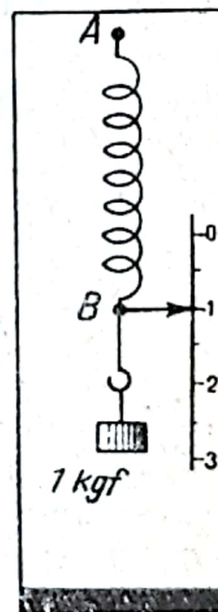


Fig. 2.2.

O construcție mai perfecționată este arătată în figura 2.3,*a* și *b*. Aci, lamele elastice, AB și CD se depărtează sub acțiunea forțelor aplicate, indicînd pe un cadran intensitățile acestor forțe. Dacă este nevoie să se măsoare o forță care variază în timp, se folosește un dinamometru înregistrator, la care un mecanism se amplifică mult deformațiile

Mărimea matematică cu ajutorul căreia se reprezintă toate mărimile vectoriale din natură este *vectorul*; el se reprezintă grafic printr-o săgeată; originea săgeții reprezintă punctul de aplicație al vectorului, direcția săgeții este direcția vectorului, sensul săgeții este sensul vectorului, iar distanța de la origine la vîrful săgeții reprezintă, la o scară anumită, modulul vectorului (fig. 2.1).

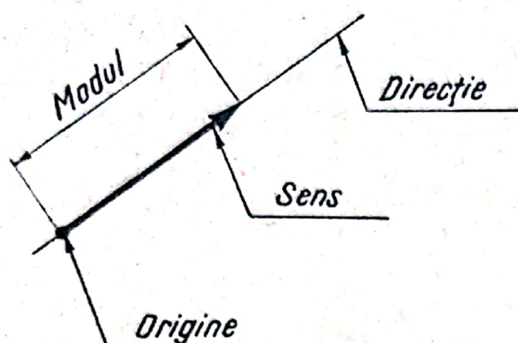


Fig. 2.1.

Pentru a distinge între ele mărimile scalare de cele vectoriale, pe acestea din urmă le vom nota cu o bară deasupra (de exemplu forța $\overline{F}$).

Acțiunile forțelor se întîlnesc pretutindeni în natură; astfel, datorită forței de gravitație corpurile sînt atrase spre centrul Pămîntului, datorită forței vîntului este acționată o moară de vînt sau este pusă în mișcare o corabie cu pînze, datorită forței vaporilor, pistonul unei mașini cu abur este pus în mișcare, datorită forței magnetice a unui magnet o bucată de oțel este atrasă ș.a.m.d.

Simpla constatare calitativă a acestor efecte nu poate fi însă de folos; pentru a măsura efectele forțelor, trebuie măsurate intensitățile lor. Pentru aceasta s-a ales ca unitate greutatea pe care o are 1 dm³ de apă distilată la 4 °C, la nivelul mării și la latitudinea de 45°. Această unitate a fost denumită *kilogram-forță* și notată cu simbolul kgf. în sistemul MKfS.

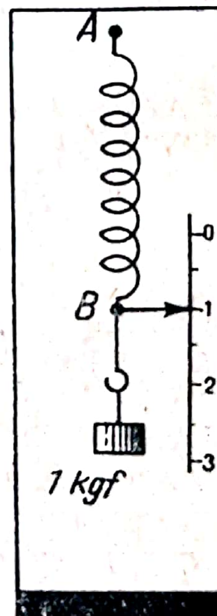


Fig. 2.2.

Pentru măsurare (compararea forțelor cu unitatea de măsură) s-au construit aparate speciale, numite *dinamometre*. Cel mai simplu dinamometru este arătat în figura 2.2. La acest aparat, intensitatea unei forțe este măsurată cu ajutorul deformației unui resort AB, care, în anumite limite, este proporțională cu forțele aplicate.

O construcție mai perfecționată este arătată în figura 2.3,*a* și *b*. Aci, lamele elastice, AB și CD se depărtează sub acțiunea forțelor aplicate, indicînd pe un cadran intensitățile acestor forțe. Dacă este nevoie să se măsoare o forță care variază în timp, se folosește un dinamometru înregistrator, la care un mecanism se amplifică mult deformațiile

resortului şi le înscrie cu ajutorul unei peniţe pe o bandă de hîrtie care se desfăşoară uniform cu ajutorul unui mecanism de ceas (fig. 2.3,*a*).

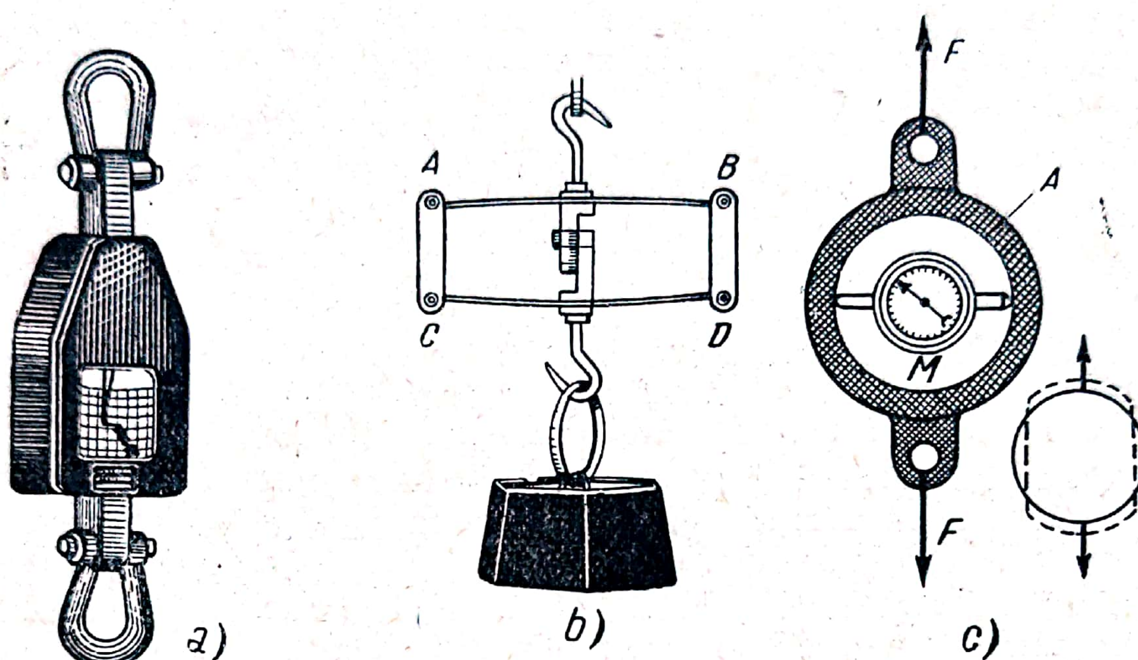


Fig. 2.3.

Un alt tip de dinamometru, denumit *inel dinamometric*, este arătat în figura 2.3,*c*. Sub acţiunea forţei *F*, inelul *A* se ovalizează; citind valoarea acestei ovalizări cu ajutorul micrometrului *M* se poate afla intensitatea forţei *F*.

Un alt tip de dinamometru este *dinamometrul hidraulic* (fig. 2.4), la care forţa de măsurat comprimă un lichid; presiunea care rezultă este transmisă unui manometru gradat direct în kgf sau tf (1 tf = 1 000 kgf), pe care se citeşte modulul forţei *F*.

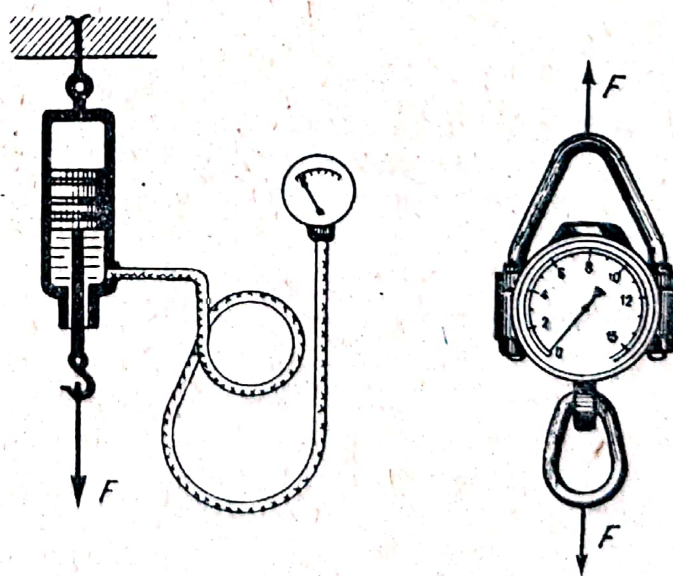


Fig. 2.4.

Dinamometrele au largi întrebuinţări în practică la măsurarea intensităţii forţelor; ast-

fel, ele sînt întrebuințate în transporturi, la măsurarea tracțiunii necesare remorcării vehiculelor (în navigația fluvială, calea ferată), la liniile electrice pentru verificarea tensiunii în firele acestor linii, în laboratoare la măsurarea forțelor suportate de diferite materiale supuse încercărilor, în uzinele metalurgice, mine, porturi, gări, la controlul greutății materialelor transportate.

3. Noțiuni elementare despre vectori

a) **Diferite feluri de vectori.** Să considerăm un paralelipiped care se deplasează rectiliniu pe o masă (fig. 2.5); un punct A al acestui paralelipiped are o deplasare din A în A', care se poate reprezenta prin vectorul $\overline{AA'}$, avînd ca punct de aplicație punctul A, ca direcție și sens direcția și sensul mișcării de translație, iar ca modul distanța AA'. Să schimbăm punctul de aplicație al vectorului $\overline{v} = \overline{AA'}$ din A în alt punct B al paralelipipedului, păstrîndu-i mărimea, direcția și sensul neschimbate.

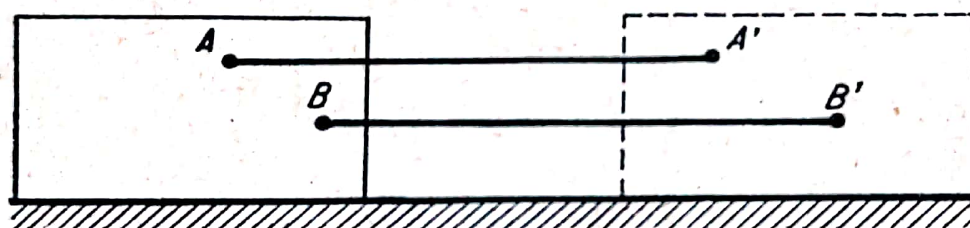


Fig. 2.5.

Se constată că același vector $\overline{v}$ reprezintă tot o deplasare, și anume deplasarea punctului B, deoarece într-o mișcare de translație toate punctele parcurg distanțe egale. Același lucru se întîmplă dacă schimbăm originea vectorului în oricare alt punct al paralelipipedului. Asemenea vectori care reprezintă o aceeași mărime fizică, indiferent de punctul lor de aplicație, deci cărora le putem schimba originea în orice punct din spațiu, păstrîndu-le modulul, direcția și sensul neschimbate se numesc *vectori liberi*.

În același mod vom defini drept *vectori alunecători* acei vectori cărora le putem schimba originea în orice punct de pe propriul lor suport păstrîndu-și neschimbate modulul, direcția și sensul.

Forța aplicată unui corp solid rigid constituie un exemplu de vector alunecător; într-adevăr, dacă tragem de un cărucior sau dacă îl împingem cu o forță astfel încît forțele aplicate în cele două cazuri să aibă același modul, aceeași orientare și același suport, vom obține același efect.

Vectorii cărora nu le putem schimba punctul de aplicație, modulul, direcția și sensul se numesc *vectori legați*. Un exem-

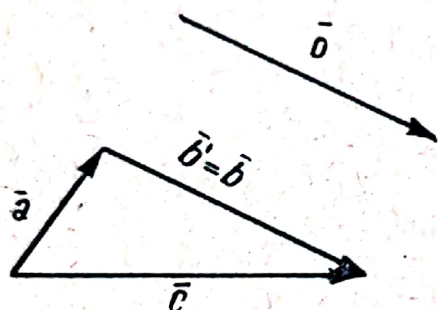


Fig. 2.6.

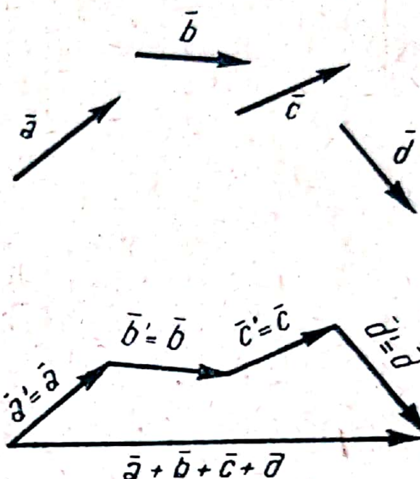


Fig. 2.7.

plu de vector legat îl constituie forța aplicată unui corp solid deformabil; într-adevăr, imediat ce schimbăm punctul de aplicație al forței, obținem deformații diferite ale corpului respectiv.

b) **Suma și diferența a doi vectori.** Prin definiție, *suma* sau *rezultanta* a doi vectori $\overline{a}$ și $\overline{b}$ este un vector $\overline{c}$ care se obține ca diagonală a paralelogramului construit pe cei doi vectori dați. El mai poate fi construit și astfel: se duce vectorul $\overline{b'}$ paralel, egal și de același sens cu $\overline{b}$ ($\overline{b'} = \overline{b}$) astfel încît originea sa să coincidă cu extremitatea vectorului $\overline{a}$; unind originea vectorului $\overline{a}$ cu extremitatea vectorului $\overline{b'}$ se obține vectorul $\overline{c}$ (fig. 2.6). Această definiție se poate generaliza pentru un număr oarecare de vectori. Spre exemplu, în figura 2.7 suma celor patru vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ a fost construită aducînd vectorii $\overline{a'} = \overline{a}$, $\overline{b'} = \overline{b}$, $\overline{c'} = \overline{c}$, $\overline{d'} = \overline{d}$ astfel încît ei să formeze un poligon, în care originea unui vector

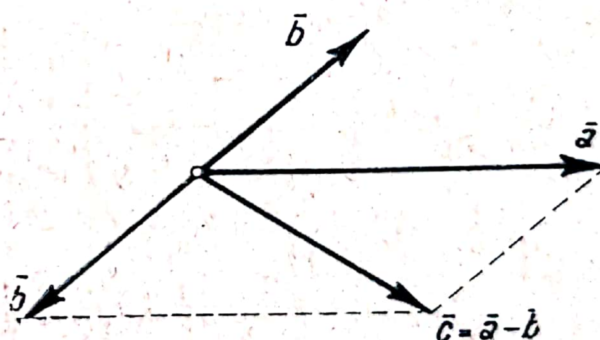


Fig. 2.8.

coincide cu extremitatea celuilalt; vectorul de închidere $\overline{s}$ reprezintă suma lor:

$$\overline{s} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}. \tag{2.1}$$

Vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ se numesc *componentele vectorului* $\overline{s}$ după direcţiile pe care sînt dirijaţi. Operaţia prin care se determină aceste componente se numeşte *descompunerea vectorului* $\overline{s}$ în componente pe direcţiile date; ea va fi examinată mai jos.

Scăderea a doi vectori se face adunînd primului vector pe cel de-al doilea vector, luat cu sens schimbat şi cu acelaşi modul (fig. 2.8):

$$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b}).$$

c) **Înmulţirea unui vector cu un scalar.** Deoarece $\overline{a} + \overline{a} = 2\overline{a}$ (fig. 2.9), rezultă că pentru a înmulţi vectorul $\overline{a}$ cu 2 va trebui să luăm pe direcţia lui $\overline{a}$ doi vectori aşezaţi în continuare. În

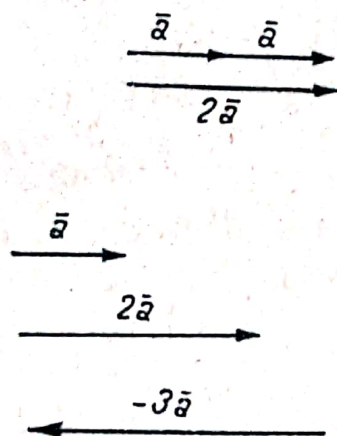


Fig. 2.9.



Fig. 2.10.

general, prin înmulţirea unui vector $\overline{a}$ cu un scalar m (pozitiv, negativ, întreg sau fracţionar) vom obţine un alt vector $\overline{c} = m\,\overline{a}$, avînd direcţia lui $\overline{a}$, acelaşi sens sau sens contrar, după cum m este pozitiv, sau negativ iar modulul egal cu valoarea absolută a lui m înmulţită cu modulul vectorului $\overline{a}$.

d) **Versorul unei direcţii.** Dacă pe o direcţie oarecare Δ luăm un vector $\overline{u}$ al cărui modul este egal cu unitatea, orice vector paralel cu această direcţie se exprimă prin produsul dintre un scalar $\overline{v}$ şi vectorul unitate:

$$\overline{v} = v\overline{u}. \tag{2.2}$$

În cazul cînd vectorul $\bar{v}$ are același sens cu vectorul $\bar{u}$, scalarul v este pozitiv; în cazul cînd vectorul $\bar{v}$ are sens contrar cu versorul $\bar{u}$, v este negativ.

Vectorul $\bar{u}$ se numește vectorul unitate sau versorul direcției considerate (fig. 2.10).

e) **Unghiul a doi vectori.** Vom denumi drept unghi a doi vectori unghiul mai mic ca 180° format între suporturile lor care poartă săgețile ce indică sensurile vectorilor (fig. 2.11).

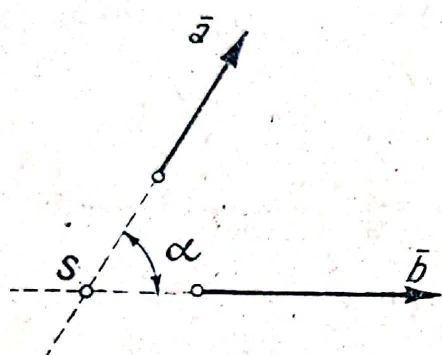


Fig. 2.11.

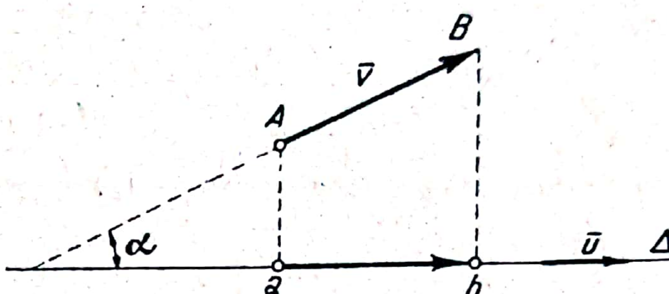


Fig. 2.12.

Unghiul unui vector cu o axă este unghiul format de vector cu versorul axei respective.

f) **Proiecția unui vector pe o axă.** *Vectorul și axa se află în același plan.* Proiecția unui vector $\bar{v}$ pe o axă Δ este vectorul $\overline{ab}$ de pe axa Δ limitat între proiecțiile extremităților A și B ale vectorului pe această axă (fig. 2.12). Ca modul, el este egal cu produsul dintre modulul vectorului și modulul cosinusului unghiului format de direcțiile pozitive ale vectorului și axei:

$$\mathrm{pr}_{\Delta}\, \bar{v} = ab = |v|\, |\cos\, \alpha|. \tag{2.3}$$

Se vede că proiecția unui vector este îndreptată în același sens cu sensul pozitiv al axei pentru $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$ și în sens contrar pentru $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

În baza formulei (2.2), scalarul v este pozitiv în primul caz și negativ în cel de-al doilea.

Vectorul și axa nu se află în același plan. În acest caz, proiecțiile extremităților vectorului $\bar{v} = \overline{AB}$ pe axa Δ se obțin cu ajutorul a două plane P_A și P_B perpendiculare pe axa Δ trecînd prin A și B (fig. 2.13). Valoarea proiecției este dată tot de formula (2. 3).

g) **Teorema proiecţiilor** se enunţă astfel : suma proiecţiilor unui număr oarecare de vectori pe o axă este egală cu proiecţia vectorului sumă a vectorilor daţi, pe aceeaşi axă (fig. 2.14).

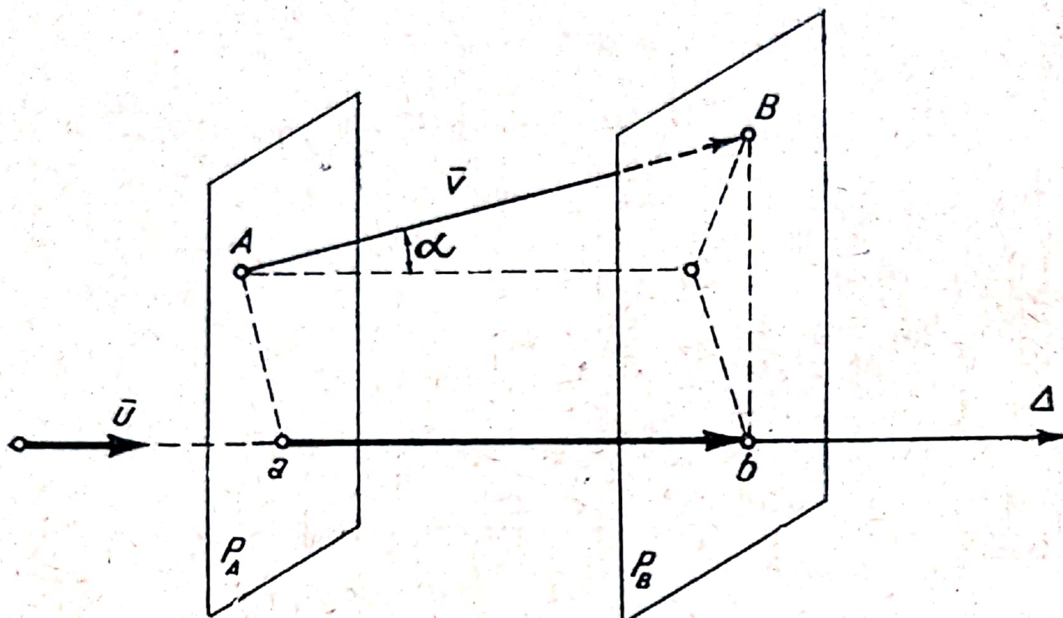


Fig. 2.13.

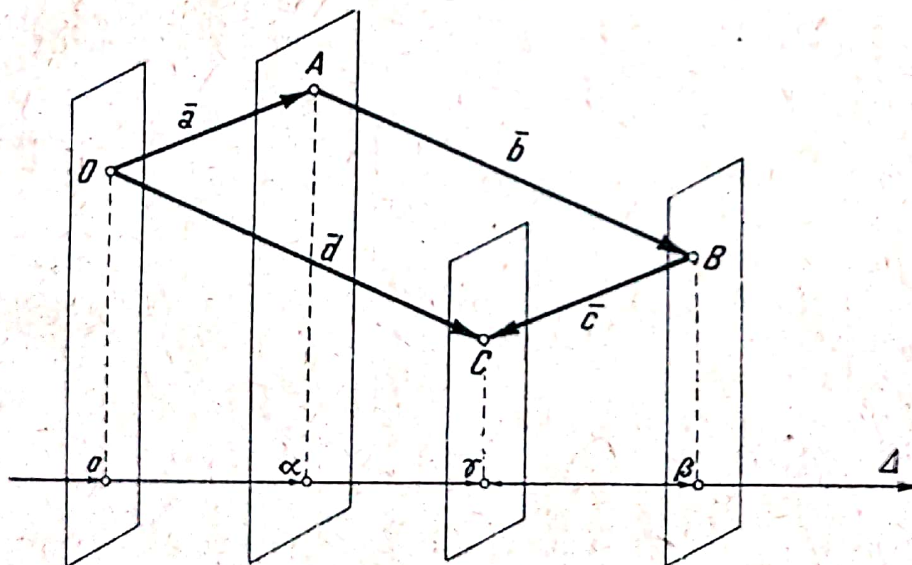


Fig. 2.14.

Într-adevăr, să considerăm suma :

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

şi să proiectăm fiecare vector pe o axă Δ. Vom avea :

$$\mathrm{pr}_{\Delta}\, \bar{a} = O\alpha, \qquad \mathrm{pr}_{\Delta}\, \bar{c} = \beta\gamma,$$
$$\mathrm{pr}_{\Delta}\, \bar{b} = \alpha\beta, \qquad \mathrm{pr}_{\Delta}\, \bar{d} = O\gamma.$$

Geometric, se vede că avem pe axa Δ :

$$O\gamma = O\alpha + \alpha\beta - \beta\gamma$$

sau

$$\text{pr}_\Delta \overline{d} = \text{pr}_\Delta \overline{a} + \text{pr}_\Delta \overline{b} + \text{pr}_\Delta \overline{c}, \tag{2.4}$$

ceea ce demonstrează teorema enunţată (proiecţia pe axa Δ a vectorului $\overline{c}$ este îndreptată în sensul negativ al axei).

4. Noţiuni de bază privind reducerea sistemelor de forţe

a) **Forţa ca vector alunecător.** Să efectuăm următoarea experienţă : asupra unui vagon aflat pe o şină rectilinie să aplicăm o forţă $\overline{F}$ dirijată în direcţia acestei şine (fig. 2.15) ; forţa $\overline{F}$ o vom aplica succesiv în două locuri : mai întîi în partea din faţă a vagonului şi apoi în partea din spate. După cîte ne este cunoscut din practică, vagonul va căpăta în ambele cazuri aceeaşi mişcare. Aceasta revine la a spune că *mutarea punctului de aplicaţie al forţei* $\overline{F}$ *pe suportul său n-a influenţat cu nimic mişcarea vagonului;* de aci tragem concluzia că *orice forţă care acţionează un solid rigid poate fi considerată ca vector alunecător*, adică îşi poate muta punctul de aplicaţie oriunde pe suportul său, fără ca prin aceasta să-şi modifice efectul asupra solidului respectiv.

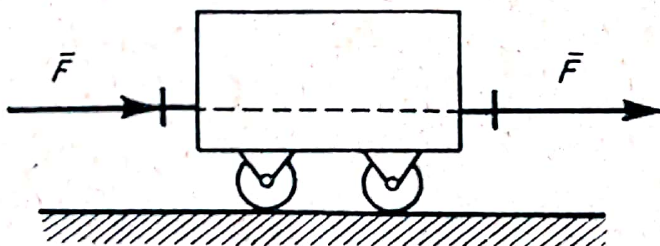


Fig. 2.15.

b) **Momentul unei forţe în raport cu un punct.** Să considerăm un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe (o roată, o pîrghie) şi să ne întrebăm cum trebuie aplicată o forţă F asupra acestui corp astfel încît ea să-i producă cel mai mare „efect de rotaţie" ? Vom constata că dacă într-un punct A, aflat la o depărtare fixă de axa de rotaţie O, vom aplica pe rînd forţe $\overline{F}$ perpendiculare pe dreapta OA din ce în ce mai mari (fig. 2.16), roata se va pune în mişcare de fiecare dată, din ce în ce mai uşor. Dar tot experienţa ne mai arată că putem pune roata în mişcare din ce în ce mai uşor, cu aceeaşi forţă, dacă ne depăr-

tăm însă cu punctul de aplicaţie al forţei de axa de rotaţie. Iată deci că nu numai mărimea forţei $\overline{F}$ este determinată în obţinerea unei anumite mişcări de rotaţie, ci şi poziţia ei în raport cu axa de rotaţie. Deoarece experienţa arată că forţe de mărimi diferite aşezate la distanţe diferite provoacă aceeaşi mişcare dacă este îndeplinită condiţia ca produsul dintre mărimea forţei şi distanţa dintre suportul forţei şi axa de rotaţie să fie acelaşi, s-a dedus că *mărimea care măsoară efectul produs de o forţă asupra unui corp aflat în rotaţie este produsul dintre modulul forţei şi distanţa de la forţă la axa de rotaţie.*

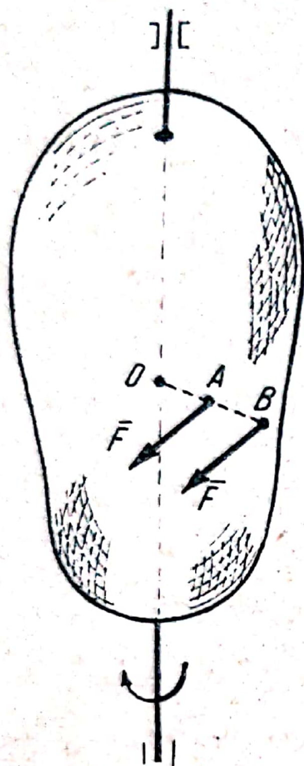


Fig. 2.16.

Mărimea care măsoară efectul de rotaţie al unui corp în jurul unui punct, ca rezultat al acţiunii unei forţe asupra corpului respectiv, este denumită în mecanică *moment*.

Vom denumi moment al forţei $\overline{F}$ în raport cu un punct O oarecare din spaţiu, produsul dintre modulul forţei $\overline{F}$ şi lungimea perpendicularei coborîte din punctul O pe suportul forţei $\overline{F}$ (fig. 2.17):

$$M_O = Fd. \tag{2.5}$$

Deoarece o anumită forţă acţionînd asupra unui corp la o distanţă dată de axa de rotaţie poate roti corpul într-un sens sau în celălalt, va trebui să distingem acest fapt însoţind valoarea momentului de un semn; *vom considera pozitiv momentul care roteşte corpul în sensul invers acelor unui ceasornic şi negativ momentul care îl roteşte în sens contrar.* Momentul unei forţe în raport cu un punct este deci o mărime caracterizată prin valoare numerică şi sens. Să arătăm acum că momentul unei forţe în raport cu un punct este o mărime care posedă şi direcţie. Pentru aceasta, să efectuăm o experienţă simplă cu aparatul din figura 2.18. Aparatul se compune dintr-o roată şi un ax O, care la rîndul său este montat liber pe axul AB care se poate roti în jurul verticalei. Să aplicăm roţii o forţă verticală $\overline{F}$; roata se va pune în mişcare în jurul axei sale proprii O, dirijată orizontal. Să rotim acum forţa $\overline{F}$ în jurul punctului de

aplicaţie, fără a-i schimba direcţia pînă la centrul roţii şi nici valoarea sa, pînă ce suportul ei devine orizontal. Vom constata că roata nu se mai învîrte în jurul axei orizontale O, ci în jurul axei verticale AB. Iată deci că deşi modulul forţei $\overline{F}$ şi punctul

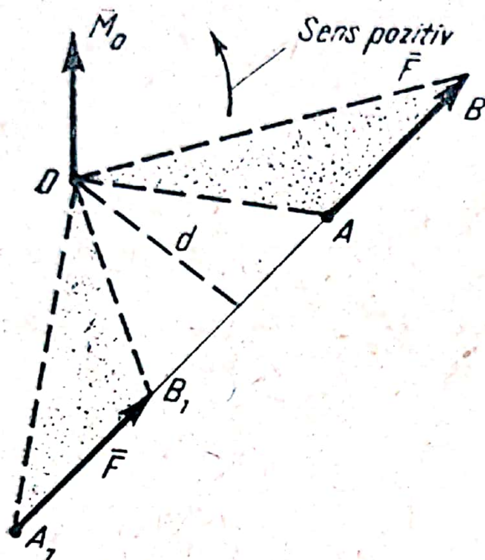


Fig. 2.17.

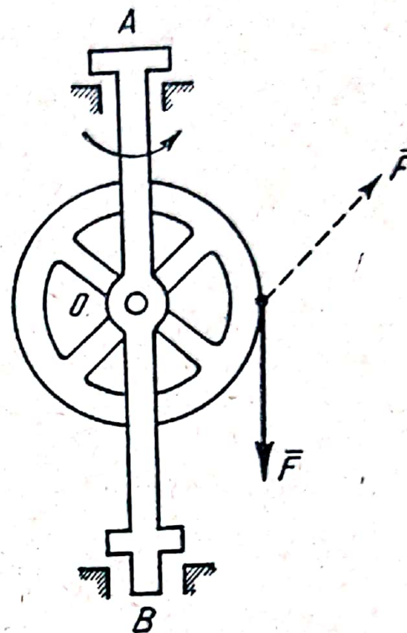


Fig. 2.18.

său de aplicare rămîn aceleaşi, totuşi efectul momentului în raport cu punctul O este diferit dacă planul determinat de vectorul forţă şi de punctul faţă de care se ia momentul îşi schimbă orientarea în spaţiu.

Această constatare practică a condus la concluzia că *momentul unei forţe în raport cu un punct este o mărime vectorială* ale cărei caracteristici sînt următoarele (v. fig. 2.17) :

— *punctul de aplicaţie* se află în punctul faţă de care se ia momentul, deoarece, pentru o forţă dată, o dată cu schimbarea acestui punct se schimbă şi valoarea momentului ;

— *direcţia* sa este perpendiculară pe planul format de forţa dată şi de punctul faţă de care se ia momentul (ea este direcţia axei faţă de care se roteşte corpul) ;

— *mărimea* sa este egală cu produsul dintre forţa şi distanţa de la punct la suportul forţei ;

— *sensul* vectorului moment este astfel încît un observator aşezat în lungul vectorului, cu capul în vîrful său, să vadă rotindu-se planul determinat de forţă şi punct în sens invers acelor unui ceasornic.

Proprietățile momentului. Din definiția momentului unei forțe în raport cu un punct rezultă următoarele proprietăți :

— momentul unei forțe în raport cu un punct situat pe suportul său este nul, pentru că în acest caz distanța de la punct la suportul forței este nulă ;

— valoarea momentului unei forțe în raport cu un punct, este egală cu dublul ariei triunghiului format de forța dată și de punctul față de care se ia momentul (v. fig. 2.17) :

$$M_O = Fd = 2 \times \text{aria } \Delta\ AOB; \tag{2.6}$$

— nici una dintre caracteristicile momentului nu se modifică dacă forța dată alunecă pe suportul său. Într-adevăr, punctul O și planul P rămîn aceleași (deci punctul de aplicație și direcția rămîn aceleași), sensul nu se modifică deoarece forța rămîne tot de aceeași parte a punctului față de care se ia momentul, iar mărimea rămîne aceeași deoarece (v. fig. 2.17) :

$$\text{aria } \Delta\, AOB = \text{aria } \Delta A_1 O B_1. \tag{2.7}$$

c) **Momentul unei forțe în raport cu o axă.** Momentul unei forțe în raport cu un punct măsoară efectul acestei forțe în raport cu axa perpendiculară pe planul format de forță și de punct; de multe ori, în aplicații este nevoie să cunoaștem efectul forței în raport cu o axă trecînd prin același punct, dar care diferă de axa perpendiculară pe planul format de forță și punct. Ca exemplu să considerăm tot aparatul din figura 2.18 ; la periferia roții să aplicăm o forță înclinată cu un unghi oarecare ; datorită acțiunii acestei forțe, roata se va pune în mișcare atît în jurul axei proprii O cît și în jurul axei verticale AB. Practica ne arată că mișcarea în jurul acestor axe se face mai repede sau mai încet (pentru o aceeași forță și distanță la punctul O) în funcție de înclinarea forței. *Efectul de rotire al forței $\overline{F}$ în jurul acestor axe se măsoară prin momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa respectivă.* El se obține proiectînd

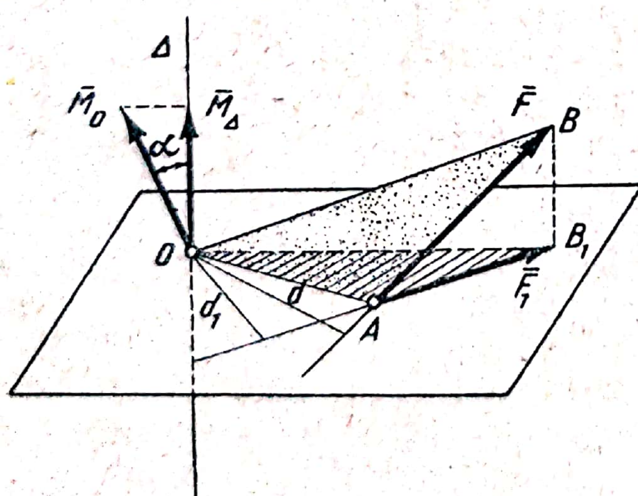


Fig. 2.19.

momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O al axei (moment care este perpendicular pe planul format de forță și punct) pe axa respectivă. Vom avea deci (fig. 2.19) :

$$M\Delta = M_O \cos\alpha = Fd\cos\alpha. \tag{2.8}$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă, fiind proiecția momentului aceleiași forțe în raport cu un punct de pe axa respectivă pe acea axă, este de asemenea un vector, care măsoară efectul de rotație produs de o forță în jurul acestei axe.

Să proiectăm forța $\overline{F}$ pe un plan perpendicular pe axa față de care se ia momentul și să luăm momentul acestei proiecții în raport cu punctul unde axa înțeapă planul. Deoarece :

$$\text{aria } OAB_1 = \text{aria } OAB\cos\alpha, \tag{2.9}$$

înseamnă că momentul acestei proiecții în raport cu punctul O este egal cu momentul forței $\overline{F}$ în raport cu axa Δ ;

$$Fd\cos\alpha = F_1 d_1.$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă este nul dacă aria OAB_1 este nulă : aceasta se întîmplă atunci cînd forța $\overline{F}$ este paralelă cu axa ($\overline{F_1} = 0$) sau cînd întîlnește această axă ($d_1 = 0$). Într-adevăr, după cîte se știe din practică sau după cîte se poate constata, efectuînd experiențe pe aparatul din figura 2.18, un corp care se poate roti în jurul unei axe nu poate fi pus în mișcare niciodată cu o forță care este paralelă cu axa respectivă sau care o întretaie.

Dacă o forță este perpendiculară pe axa față de care se ia momentul, atunci valoarea momentului se obține înmulțind modului forței cu lungimea perpendicularei comune dintre suportul forței și axă. Această situație se întîlnește foarte des în aplicații.

Procedînd astfel, am redus noțiunea de moment al unei forțe în raport cu o axă, la noțiunea de moment în raport cu un punct ; de aceea toate proprietățile noțiunii de moment al unei forțe în raport cu un punct, se păstrează și în cazul noțiunii de moment în raport cu o axă.

Să calculăm momentele unei forțe în raport cu axele de coordonate ale unui sistem de axe $Oxyz$. Vom considera o forță $\overline{F}$ aplicată într-un punct A și un sistem trioctogonal de axe $Oxyz$

(fig. 2.20). Forța $\overline{F}$ are proiecțiile F_x, F_y, F_z pe axele de coordonate, iar punctul A are coordonatele x, y, z față de același sistem de axe.

Mai întîi observăm că forța F_x nu va da moment în raport cu axa Ox deoarece este paralelă cu ea ; de asemenea, forța F_y nu va da moment în raport cu axa Oy și forța F_z în raport cu axa Oz.

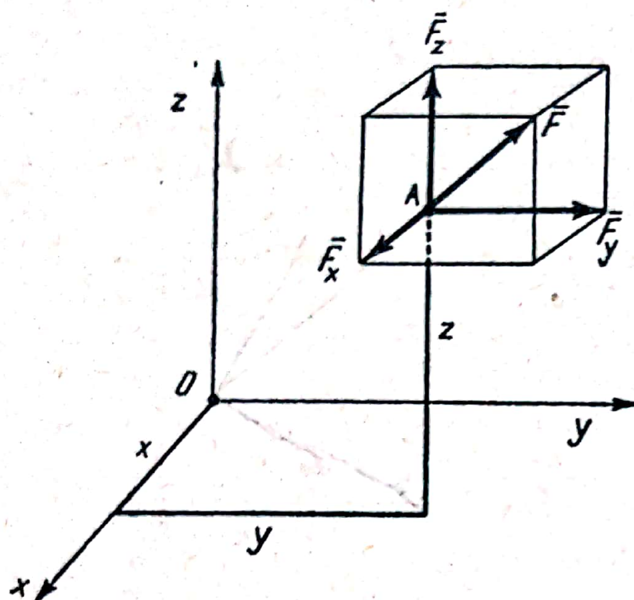


Fig. 2.20.

Față de axa Ox dau momente componentele F_y și F_z. Distanța de la componenta F_y la axa Ox este coordonata z, iar de la componeta F_z la axa Ox este coordonata y. Componenta F_y rotește axa Ox în sensul acelor ceasornicului (văzut din direcția săgeții de pe Ox), iar componenta F_z rotește aceeași axă în sensul invers acelor ceasornicului ; rezultă deci că momentul componentei F_y în raport cu axa Ox este negativ, în timp ce momentul componentei F_z este pozitiv. Însumînd valorile celor două momente cu semnul lor, obținem :

$$M_x = yF_z - zF_y$$

și în mod analog pentru celelalte axe (2.10

$$M_y = zF_x - xF_z\ ,$$

$$M_z = xF_y - yF_x.$$

d) **Cuplu.** Să considerăm un *sistem de două forțe paralele, egale, avînd sensuri contrare și acționînd pe suporturi diferite;* ele formează în mecanică un sistem de două forțe, denumit cu un singur cuvînd *cuplu*. El se întîlnește foarte des în aplicații ; la rotirea unei șurubelnițe (fig. 2.21, *a*), a unei chei (fig. 2. 21, *b*), a mînerului unei prese (fig. 2.21, *c*), a acului unei busole (fig. 2.21, *d*) etc. apar întodeauna asemenea perechi de forțe care formează un cuplu. Distanța dintre cele două forțe care for-

mează cuplul se numește *brațul cuplului*. Cuplul exercită asupra corpului căruia îi este aplicat o acțiune, datorită căruia corpul respectiv se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe planul format de cele două forțe, denumit *planul cuplului*.

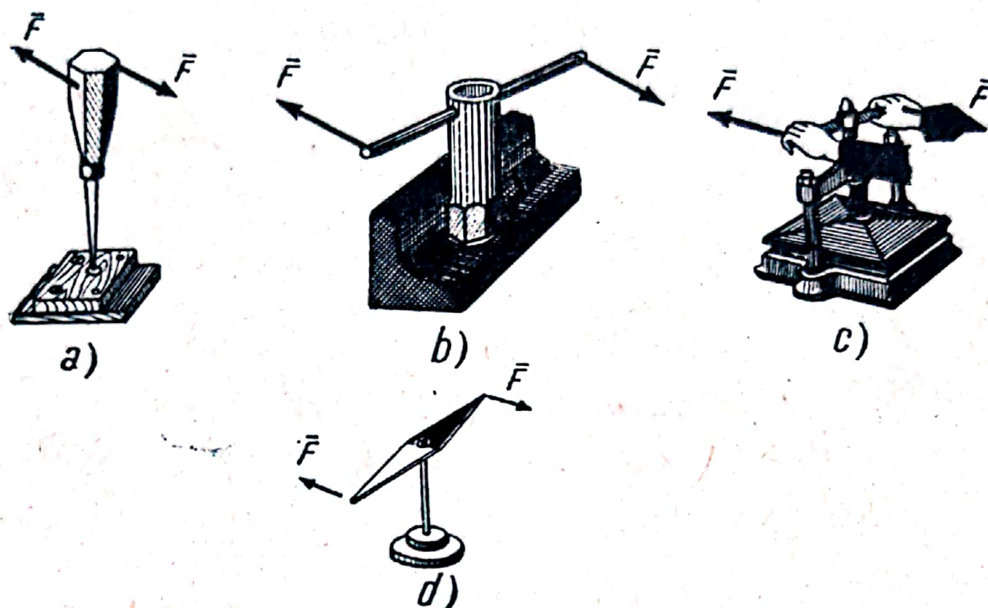


Fig. 2.21.

Acțiunea unui cuplu nu poate fi înlocuită cu aceea a unei singure forțe, adică sistemul format de cele două forțe care alcătuiesc cuplul nu poate fi redus la un sistem mai simplu.

Să calculăm suma momentelor forțelor cuplului în raport cu un punct oarecare din planul său; valoarea obținută o vom denumi momentul cuplului. Fie A un punct oarecare din planul cuplului; suma momentelor celor două forțe ale cuplului în raport cu acest punct este, ținînd seama și de sens (fig. 2.22, *a*) :

$$M_A = F(d+x) - Fx = Fd. \tag{2.11}$$

Deoarece punctul A a fost arbitrar, rezultă că *suma momentelor forțelor cuplului în raport cu orice punct din planul său este o mărime constantă, egală cu produsul dintre modulul uneia dintre forțe și brațul cuplului*. Se poate arăta că această afirmație rămîne valabilă chiar dacă punctul A nu se află în planul cuplului, ci se găsește undeva în spațiu.

Momentul unui cuplu servește ca măsură a acțiunii de rotire pe care o exercită cuplul respectiv asupra corpului căruia îi este aplicat; ca și momentul unei forțe, momentul cuplului este un produs dintre o forță și o lungime; el se măsoară în teh-

nică în unităţile: kilogram-forţă-metru, kilogram-forţă-centimetru sau tonă-forţă-metru.

Trebuie observat faptul că momentul unui cuplu, fiind compus din suma momentelor a două forţe, este şi el o mărime

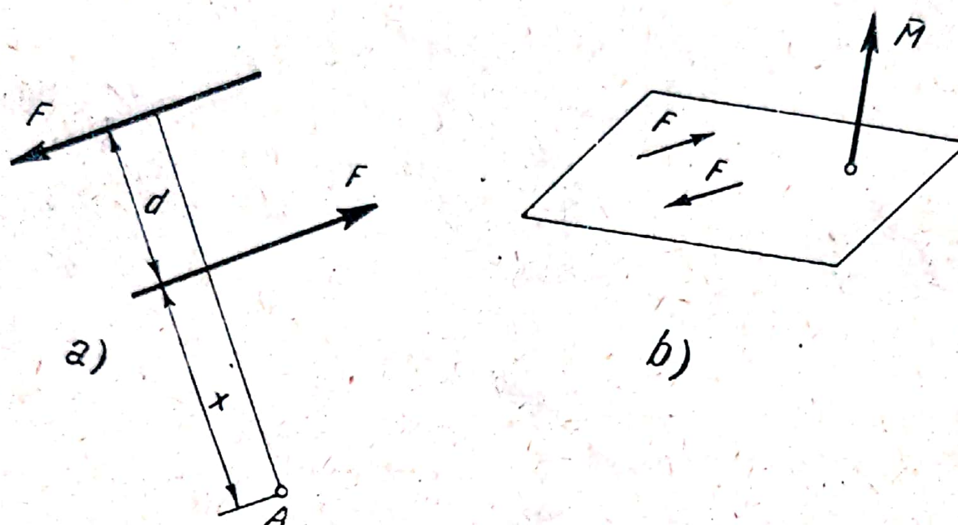


Fig. 2.22.

vectorială; într-adevăr, pentru cunoaşterea acţiunii unui cuplu asupra corpului căruia îi este aplicat, trebuie cunoscută valoarea acesteia acţiuni (produsul Fd), axa în jurul căreia are loc rotaţia, axă care este perpendiculară pe planul cuplului (direc-

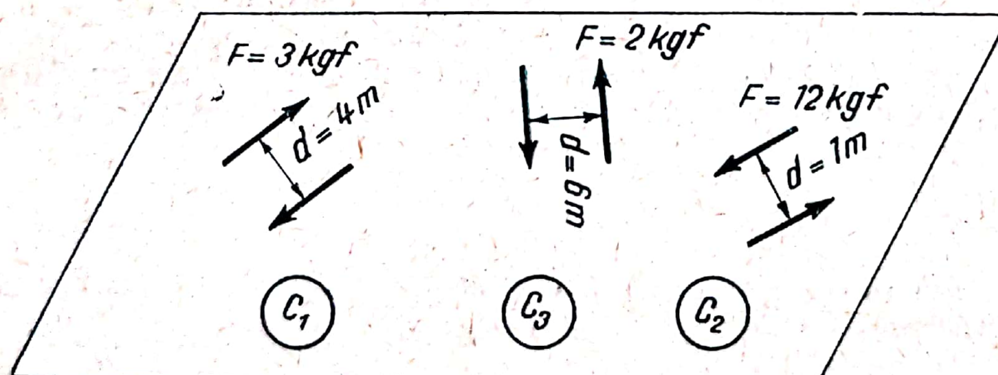


Fig. 2.23.

ţia vectorului) şi sensul rotaţiei (sensul vectorului moment). Punctul de aplicaţie al vectorului moment al unui cuplu poate fi ales oriunde în planul său sau chiar în spaţiu, deoarece, după cum am văzut mai sus, suma momentelor vectorilor care alcă-

tuiesc cuplul este aceeaşi, oricare ar fi punctul faţă de care se calculează (fig. 2.22, *b*). Aceasta revine la a spune că *vectorul cuplu este un vector liber;* adunarea cuplurilor se face după regulile de adunare a vectorilor (v. fig. 2.7). Astfel, un sistem de cupluri care acţionează în acelaşi plan poate fi înlocuit printr-un cuplu situat în planul comun, deoarece adunarea vectorilor moment ale cuplurilor revine la adunarea unor vectori coliniari.

Vom înţelege prin *cupluri echivalente* două sau mai multe cupluri care au vectorii moment egali (mărime, direcţie, sens). Astfel cuplurile C_2 şi C_3 din figura 2.23 sînt echivalente, dar cuplurile C_1 şi C_2 nu sînt echivalente, deoarece vectorii moment nu sînt egali (au aceeaşi direcţie şi modul, dar au sensuri diferite).

e) **Diferite sisteme particulare de forţe şi cupluri concentrate care acţionează sistemele materiale.** Asupra corpurilor din natură sau ale organelor de maşini întîlnite în tehnică acţionează diferite forţe şi cupluri; în mecanică un ansamblu de mai multe forţe poartă denumirea de *sistem de forţe.* După modul în care forţele unui sistem sînt aşezate în spaţiu, ele pot fi încadrate într-unul din următoarele sisteme particulare:

— *sistem de forţe coliniare* este acel sistem de forţe la care toţi vectorii forţă au drept suport o aceeaşi dreaptă;

— *sistemul de forţe concurente şi coplanare* este acel sistem de forţe la care suporturile vectorilor forţă sînt situate în acelaşi plan şi trec printr-un acelaşi punct din planul lor;

— *sistem de forţe concurente în spaţiu* este acel sistem de forţe la care suporturile vectorilor forţă sînt situate oricum în spaţiu, dar trec printr-un acelaşi punct;

— *sistem de forţe coplanare paralele* este acel sistem de forţe la care suporturile vectorilor forţă sînt situate în acelaşi plan şi sînt paralele cu o direcţie dată din acest plan;

— *sistem de forţe coplanare oarecare* este acel sistem de forţe la care suporturile vectorilor sînt situate oricum într-un acelaşi plan;

— *sistem de forţe paralele în spaţiu* este acel sistem de forţe la care suporturile vectorilor forţă sînt situate oricum în spaţiu, dar paralele cu o direcţie dată;

— *sistem de cupluri situate în acelaşi plan* este acel sistem de forţe la care perechile de vectori forţă care alcătuiesc cuplurile sînt situate în acelaşi plan (vectorii moment ai fiecăruia

dintre cupluri sînt dirijați perpendicular pe planul forțelor cuplurilor, formînd un sistem de vectori coliniari);

— *sistem de cupluri oarecare în spațiu* este acel sistem de forțe la care perechile de vectori forță care alcătuiesc cuplurile sînt situate în plane diferite din spațiu (vectorii moment ai acestor cupluri sînt dirijați oricum în spațiu, perpendiculari pe planele care conțin forțele);

— *sistem de forțe și cupluri oarecare în spațiu* este cel mai general sistem de forțe, la care vectorii forță și vectorii moment ai cuplurilor sînt dirijați oricum în spațiu.

f) **Sisteme echivalente; operații elementare de echivalență.** Să presupunem că asupra unui corp acționează pe rînd două sisteme de forțe care produc același efect; aceste sisteme prezintă o mare importanță în mecanică și sînt denumite *sisteme echivalente.*

O axiomă evidentă este aceea care afirmă că *două sisteme de forțe echivalente cu un al treilea sînt echivalente între ele.*

Trecerea de la un sistem la altul, echivalent cu el, se face prin așa-numitele *operații de echivalență.*

Aceste operații, analoge operațiilor cu ajutorul cărora se trece în algebră de la o ecuație la alta echivalentă cu ea (ca de exemplu reducerea termenilor asemenea, trecerea dintr-un membru în altul ș.a), nu schimbă efectul sistemului de forțe.

Operații de echivalentă sînt:

— înlocuirea a două forțe concurente prin suma (rezultanta) lor;

— înlocuirea unei forțe prin componentele sale după două direcții date, concurente pe suportul forței date;

— introducerea a două forțe egale și direct opuse;

— suprimarea a două forțe egale și direct opuse;

— lunecarea forțelor aplicate unui solid rigid pe suporturile lor.

Primele patru operații au la bază principiile mecanicii, iar ultima are la bază caracterul de vector alunecător al forței aplicate unui solid rigid.

Aplicînd aceste operații unui sistem de forțe, îl putem transforma într-altul echivalent cu el. Transformarea unui sistem de forțe în cel mai simplu sistem echivalent cu el constituie operația denumită *reducere.* Operația de reducere se efectuează în raport cu un anumit punct din spațiu; ea oferă posibilitatea înlocuirii unui sistem de forțe, oricît de complicat, prin

așa-numitele *elemente de reducere*, care înlocuiesc în calcule întregul sistem de forțe.

g) **Reducerea unei forțe și a unui sistem de forțe într-un punct.** Să considerăm o forță $\overline{F}$ și un punc O din spațiu; să reducem forța $\overline{F}$ în punctul O (fig. 2.24). Pentru aceasta, în baza celei de-a treia operații de echivalență, vom introduce în

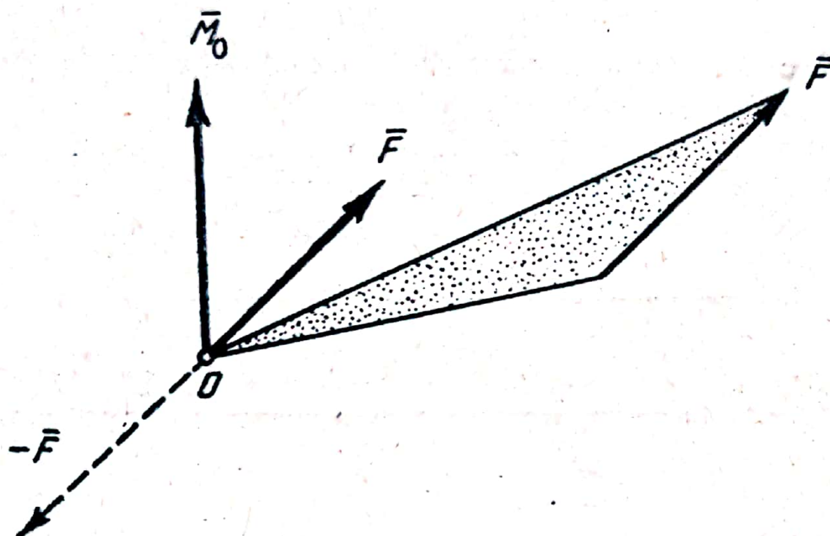


Fig. 2.24.

punctul O două forțe egale și direct opuse avînd modulul F. În locul forței $\overline{F}$ vom avea de redus sistemul forțelor, $\overline{F}$, $\overline{F}$ și $-\overline{F}$ echivalent cu sistemul dat. Forța dată $\overline{F}$ împreună cu forța $-\overline{F}$ din punctul O formează un cuplu, al cărui moment este egal cu momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O. Vom reprezenta momentul forței $\overline{F}$ în raport cu punctul O prin vectorul $\overline{M}_O$, perpendicular pe planul format de forță dată și punctul de reducere și aplicat în O. În acest fel am obținut cele două elemente de reducere ale forței $\overline{F}$ în punctul O: forța $\overline{F}$ și cuplul de moment $\overline{M}_O$. Se observă ușor că forța $\overline{F}$ și vectorul $\overline{M}_O$ sînt perpendiculari între ei.

În cazul general, pentru reducerea unui sistem de forțe vom proceda în mod analog pentru fiecare forță în parte; vor apărea astfel în punctul de reducere un număr de forțe egale, paralele și de același sens cu forțele date, concurente în punctul O, și un număr de vectori moment, perpendiculari pe planele formate de forțe și punctul de reducere, de asemenea concurenți în punctul de reducere. Prin compunerea lor vom obține un vector *forță rezultantă* și un vector *moment rezultant*, aplicați

în punctul de reducere. Acestea sînt cele două elemente de reducere în cazul cel mai general al unui sistem de vectori.

În cele ce urmează vom calcula elementele de reducere în cazul a diferite sisteme particulare de vectori.

5. Reducerea într-un punct a diferitelor sisteme de forțe

a) **Forțe coliniare.** *Reducerea într-un punct de pe suportul comun al forțelor.*

Să considerăm cazul unui sistem de forțe situate pe o aceeaşi dreaptă Δ (2.25). Să alunecăm toate forțele pe suport pînă ce originile lor se suprapun în punctul de reducere

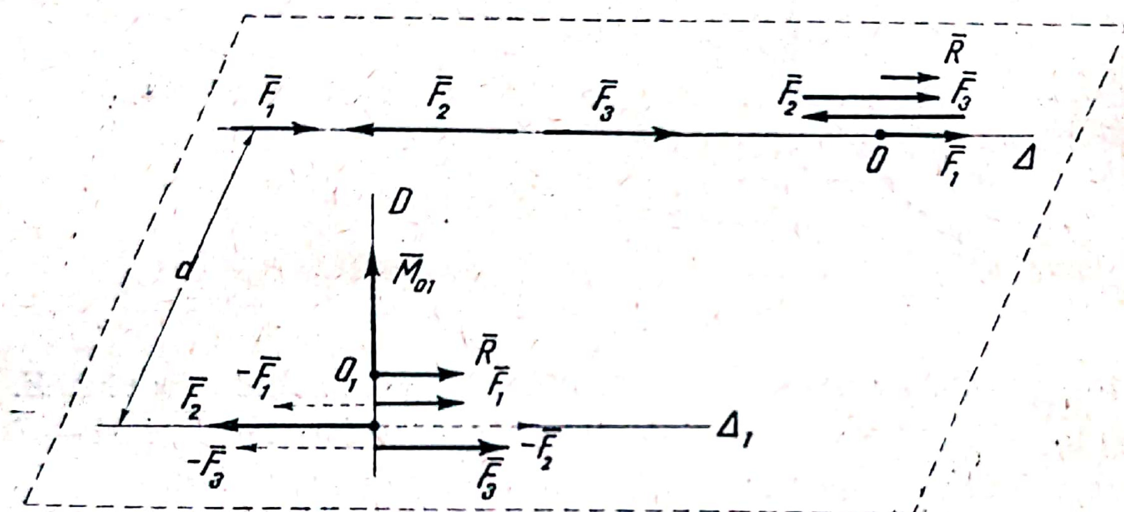


Fig. 2.25.

O; pentru a le reduce, le vom compune după regula paralelogramului sau, ceea ce e tot una, după regula adunării vectorilor. Procedînd astfel, vom obține ca elemente de reducere o singură forță rezultantă $\bar{R}$ al cărui suport este chiar suportul comun al forțelor. În acest caz particular, modulul rezultantei se poate calcula foarte simplu, fără a mai face uz de regula paralelogramului, astfel: se alege pe dreapta Δ un sens pozitiv şi se adună algebric modulele forțelor componente: forțelor dirijate în sensul pozitiv ales li se atribuie semnul plus, iar celor dirijate în sens negativ li se atribuie semnul minus.

Reducerea într-un punct O_1 din spațiu. Să alegem acum punctul O_1 de reducere situat undeva în spațiu, în afara dreptei Δ şi la distanța d de aceasta. Pentru a reduce sistemul de forțe

dat în punctul O_1, vom introduce în acest punct două forțe egale și direct opuse pentru fiecare dintre forțele date; vom avea de redus deci, în locul sistemului de trei forțe date, un sistem de nouă forțe. Acest ultim sistem fiind echivalent cu primul, el produce asupra corpului căruia îi este aplicat același efect ca și primul sistem. Forțele acestui sistem le vom compune astfel: vom lua mai întîi forțele $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ de pe suportul Δ cu forțele $-\overline{F_1}$, $-\overline{F_2}$, $-\overline{F_3}$ din punctul O_1; aceste forțe formează împreună cupluri situate în planul P, determinat de dreapta Δ și punctul O_1, și avînd respectiv momentele egale cu F_1d, F_2d, F_3d. Vectorii moment ai acestor cupluri îi vom considera aplicați în punctul de reducere O_1; ei sînt toți perpendiculari pe planul P, deci sînt situați pe o dreaptă comună D. După compunerea acestor șase forțe, observăm că au mai rămas încă trei forțe care nu sînt altele decît cele trei forțe date, mutate în punctul O_1 pe un nou suport comun Δ_1. Am obținut deci ca elemente de reducere trei vectori moment coliniari și trei vectori forță de asemenea coliniari. Compunînd între ei vectorii moment și vectorii forță după regula arătată mai sus, obținem ca elemente de reducere în punctul O_1 un vector forță rezultantă $\overline{R}$, același ca în cazul precedent, și un vector moment rezultant $\overline{M}_{O1}$, perpendicular pe planul format de punctul O_1 și dreapta Δ. Observăm că prin alegerea unui alt punct de reducere, nesituat pe dreapta Δ, vectorul forță rezultantă s-a mutat paralel cu el însuși în punctul O_1 (adică rezultanta nu s-a schimbat), dar a apărut în plus un vector moment rezultant egal cu suma momentelor forțelor date, în raport cu punctul de reducere. Vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}_{O1}$ sînt perpendiculari între ei.

b) **Forțe concurente coplanare.** *Reducerea în punctul de concurență.* Prin aplicarea succesivă a regulii paralelogramului, se poate constata ușor că acest sistem de forțe se reduce în punctul de concurență O la o singură forță rezultantă, al cărei suport se află în planul forțelor (fig. 2.26).

Reducerea într-un punct O_1 din planul forțelor. Să alegem punctul de reducere O_1 situat undeva în planul comun P al forțelor date. Pentru a reduce sistemul de forțe dat în punctul O_1 vom proceda ca în cazul precedent, introducînd în acest punct cîte două forțe egale și direct opuse pentru fiecare dintre forțele date, obținînd astfel un sistem de forțe echivalent cu sistemul dat. Vom compune mai întîi forțele date $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, cu forțele $-\overline{F_1}$, $-\overline{F_2}$, $-\overline{F_3}$, aplicate în O_1. Acestea formează împreună trei cupluri situate în planul forțelor, avînd momentele

$F_1 d_1$, $F_2 d_2$, $F_3 d_3$, unde d_1, d_2, d_3 reprezintă respectiv distanţele de la punctul de reducere O_1 la suporturile forţelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$. Vectorii moment ai acestor cupluri sînt situaţi pe normala Δ la planul P, întrucît cuplurile ($\overline{F}_1$ —$\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ —$\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ —$\overline{F}_3$) se află în planul P. Au mai rămas forţele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ mutate însă în punctul O_1 de reducere. Am obţinut deci ca elemente de

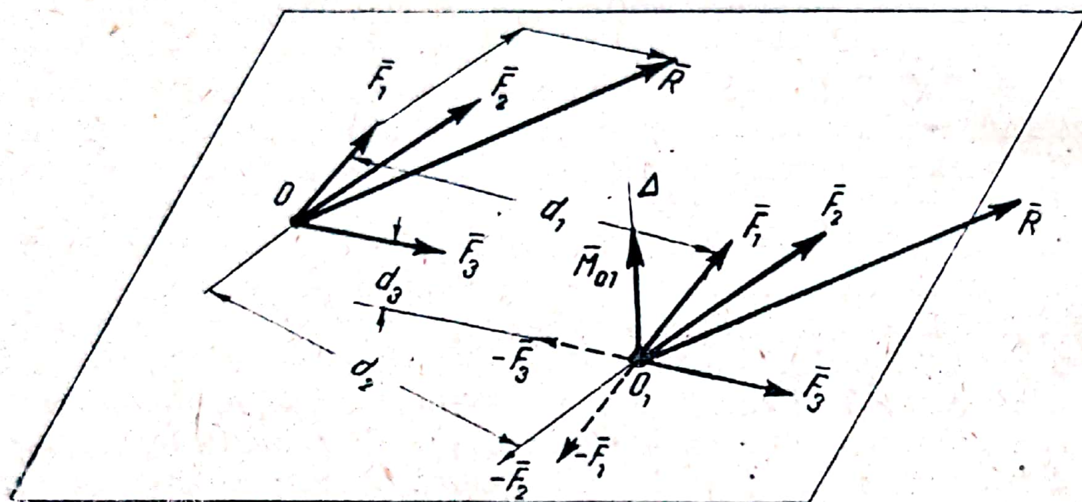


Fig. 2.26.

reducere trei vectori moment coliniari şi trei vectori forţă concurenţi. Compunînd între ei vectorii moment şi vectorii forţă după regula paralelogramului, obţinem ca elemente de reducere în punctul O_1 un vector forţă rezultantă $\overline{R}$, acelaşi ca în cazul precedent, şi un vector moment rezultant $\overline{M}_{O1}$ perpendicular pe planul forţelor şi deci şi pe rezultanta $\overline{R}$. Se observă, la fel ca în cazul precedent, apariţia unui vector moment rezultant o dată cu schimbarea punctului de reducere, în timp ce rezultanta rămîne aceeaşi.

Se poate arăta că alegînd un punct O situat oricum în spaţiu vectorii $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$ rămîn de asemenea perpendiculari.

c) **Forţe concurente în spaţiu.** *Reducerea în punctul de concurenţă* (fig. 2.27). Aplicînd succesiv regula paralelogramului, obţinem ca singur element de reducere în acest punct o forţă rezultantă.

Reducerea într-un punct O din spaţiu. Operaţia de reducere se efectuează la fel ca în cazul precedent, cu deosebirea

că vectorii forţă nu mai sînt coplanari. Se obţin ca elemente de reducere un vector forţă rezultantă şi un vector moment rezultant. Se poate arăta că şi în acest caz cele două elemente de reducere, rezultanta şi momentul rezultant, sînt perpendiculare unul pe celălalt.

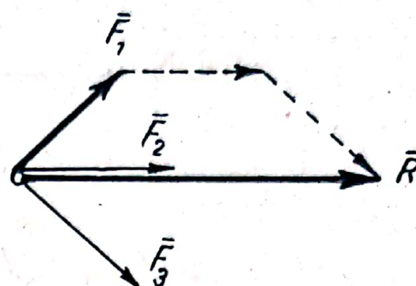


Fig. 2.27.

d) **Forţe paralele coplanare.** *Reducerea într-un punct O din planul forţelor* (fig. 2.28). Introducînd în punctul de reducere perechi de forţe egale şi direct opuse, vom avea de compus în acest punct un număr de vectori forţă coliniari şi un număr de vectori moment de asemenea coliniari, situaţi pe normala în punctul O la planul care conţine forţele. Vom obţine deci ca elemente de reducere un vector forţă rezultantă, avînd direcţia paralelă cu direcţia comună a forţelor, şi un vector moment rezultant, avînd direcţia perpendiculară pe planul forţelor.

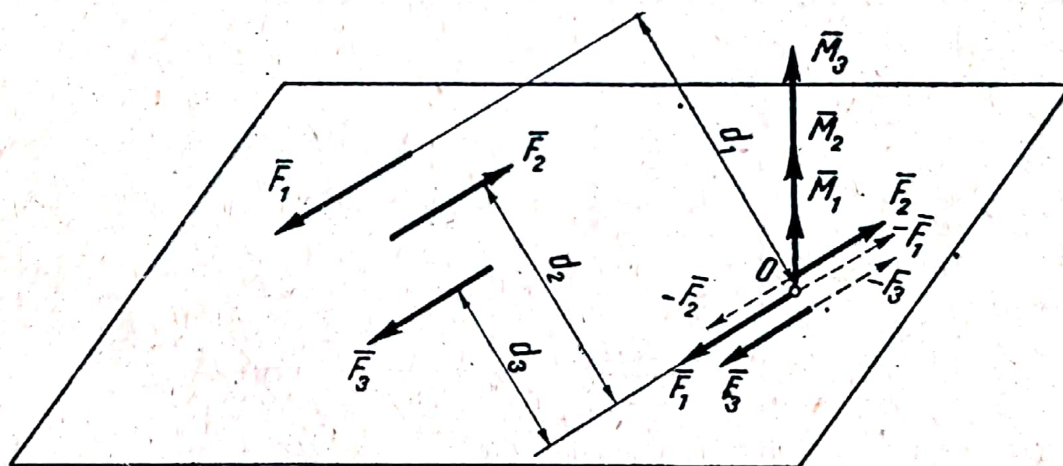


Fig. 2.28.

Reducerea într-un punct O din spaţiu. Se poate arăta că în acest caz se obţin ca elemente de reducere aceeaşi rezultantă şi un alt vector moment rezultant care însă este de asemenea perpendicular pe rezultantă.

e) **Forţe coplanare oarecare.** *Reducerea într-un punct din planul forţelor.* Se obţin ca elemente de reducere un vector forţă rezultantă, situată în planul forţelor, şi un vector moment rezultant, perpendicular pe planul forţelor (fig. 2.29).

Reducerea într-un punct din spaţiu. Se obţin ca elemente de reducere acelaşi vectori forţă rezultantă şi un vector moment rezultant perpendicular pe rezultantă.

f) **Forţe paralele în spaţiu.** *Reducerea într-un punct O din spaţiu.* Introducînd în punctul de reducere perechi de forţe

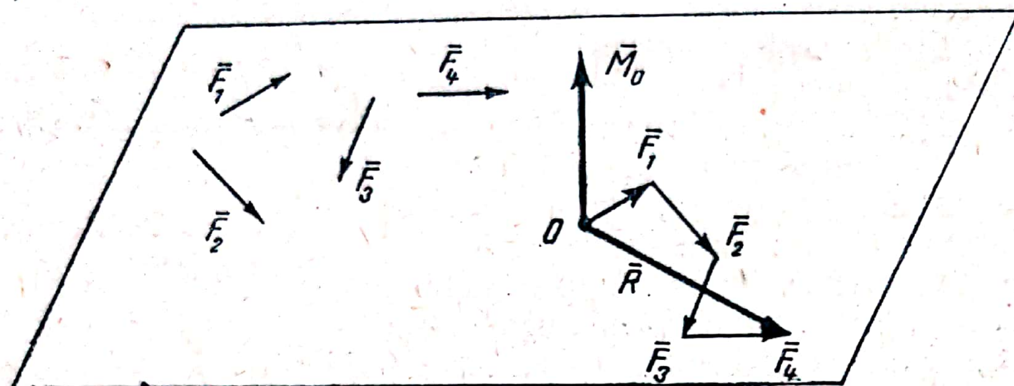


Fig. 2.29.

egale şi direct opuse, vom avea de compus în acest punct un număr de vectori forţă coliniari şi un număr de vectori moment concurenţi; se obţin ca elemente de reducere un vector forţă

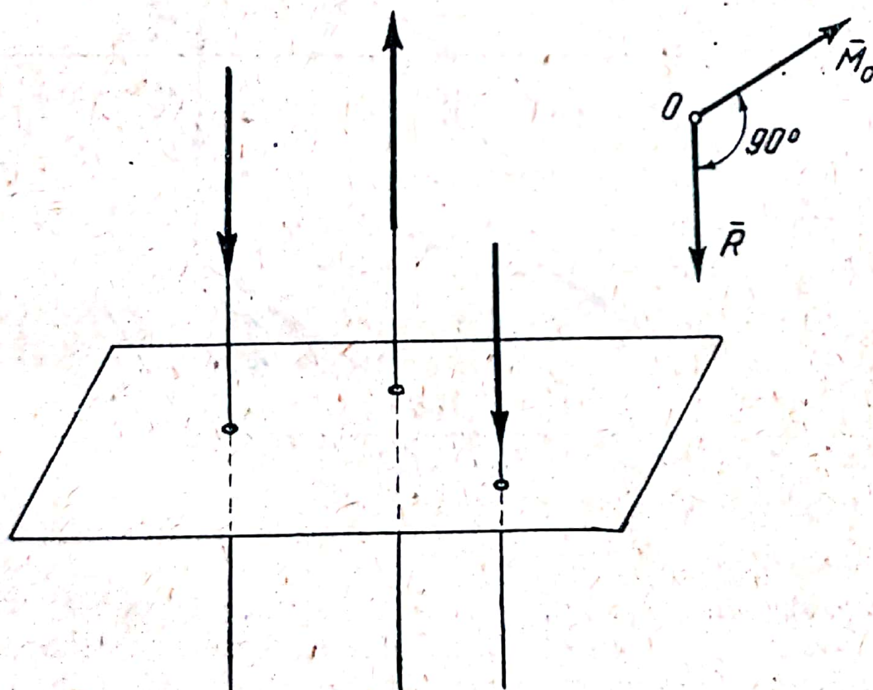


Fig. 2.30.

rezultantă şi un vector moment rezultant. Se poate arăta şi în acest caz că cele două elemente de reducere, rezultanta şi momentul rezultant, sînt perpendiculare unul pe celălalt (fig. 2.30).

g) **Cupluri în plan.** *Reducerea într-un punct O din spațiu* (fig. 2.31). Știm că vectorul moment al unui cuplu este perpendicular pe planul cuplului și are punctul de aplicație oriunde în spațiu. Reprezentînd toate cuplurile date prin vectorii moment respectivi, vom obține un sistem de vectori moment coliniari. Cum rezultanta fiecărui cuplu în parte este nulă, deducem că vom obține ca element de reducere un singur vector moment rezultant, perpendicular pe planul care conține toate cuplurile.

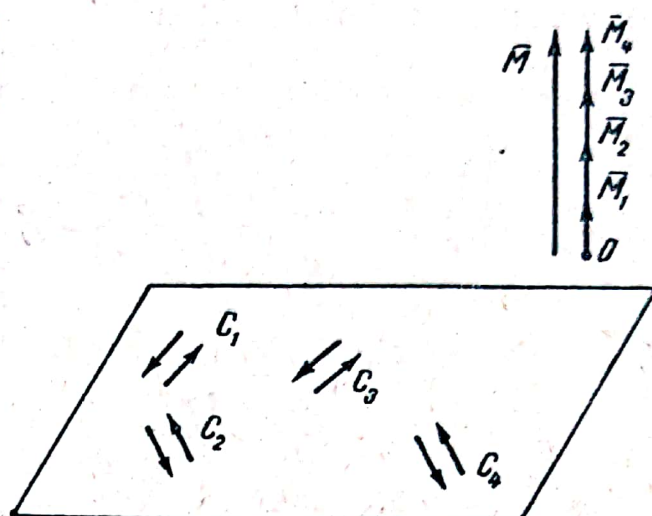


Fig. 2.31.

h) **Cupluri în spațiu.** *Reducerea într-un punct O din spațiu* (fig. 2. 32). Procedînd ca mai sus, obținem ca element de reducere un singur vector moment rezultant, care este rezultanta vectorilor moment ai cuplurilor date, reduși în punctul *O*.

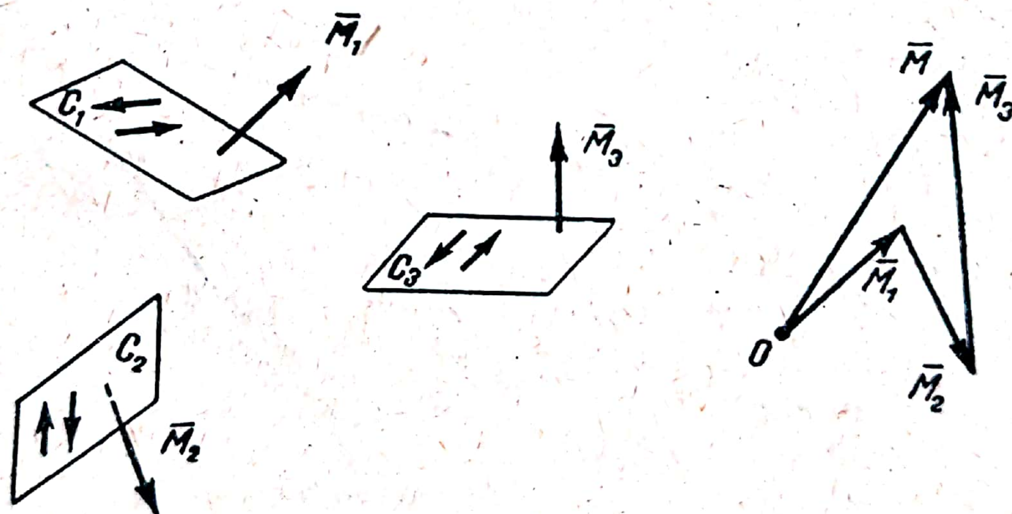


Fig. 2.32.

i) **Forțe și cupluri oarecare în spațiu.** *Reducerea într-un punct O din spațiu.* Introducînd în punctul de reducere perechi de forțe egale și direct opuse, obținem ca elemente de reducere

in O un vector forță rezultantă și un vector moment rezultant. Acesta este cazul cel mai general de sistem de forțe întîlnit in mecanică; toate celelalte sisteme de forțe analizate mai sus sînt cazuri particulare ale acestui sistem. Cele două elemente de reducere, rezultanta și momentul rezultant, fac între ele un unghi oarecare α (fig. 2.33).

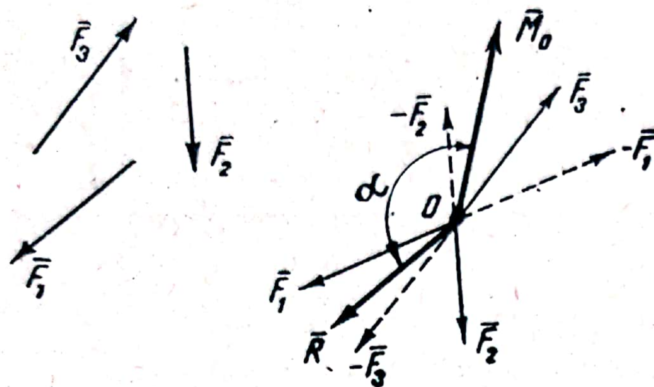


Fig. 2.33.

j) **Studierea cazului de reducere** $\overline{R} \perp \overline{M}_O$; *teorema lui Varignon.* Din cele de mai sus se constată că în aproape toate cazurile de sisteme particulare de forțe analizate (concurente, coplanare, paralele) se obțin ca elemente de reducere un vector forță rezultantă și un vector moment rezultant, perpendiculari unul pe celălalt. Vom arăta acum că în acest caz se pot găsi anumite puncte din spațiu în care avem ca element de reducere doar rezultanta sistemului respectiv de forțe, rezultantă care, după modul cum a fost determinată, se observă că este mereu aceeași, indiferent care ar fi punctul în care se face reducerea.

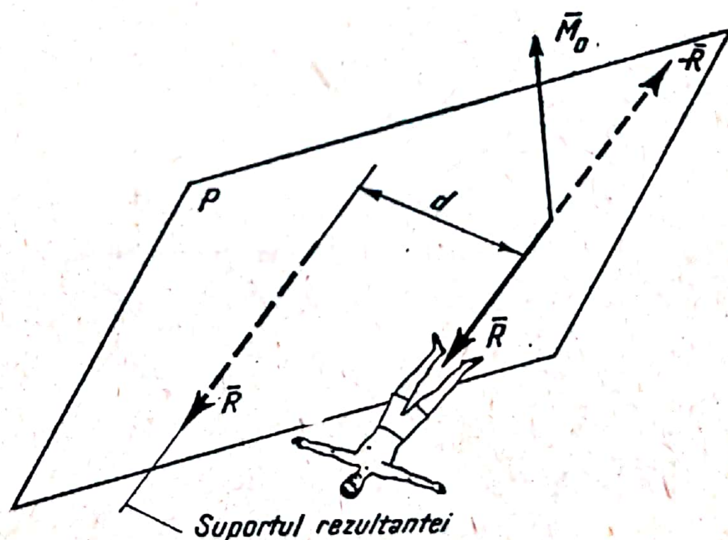


Fig. 2.34.

Pentru aceasta, să considerăm cele două elemente de reducere, rezultanta $\overline{R}$ și momentul rezultant $\overline{M}_O$, perpendiculare între ele și să ducem prin vectorul rezultantă un plan P perpendicular pe vectorul moment rezultant (fig. 2.34). În acest plan, vom reprezenta cele două forțe care alcătuiesc cuplul al cărui moment este $\overline{M}_O$ astfel încît una dintre forțe să fie situată pe suportul lui $\overline{R}$, egală și direct opusă

acesteia. Cealaltă forță a cuplului se va afla la distanța d de suportul rezultantei R dată de relația :

$$d = \frac{M_O}{R}. \qquad (2.12)$$

Valoarea ei este egală cu aceea a rezultantei R și ea este situată totdeauna la stînga unui observator care ar sta cu capul spre sensul pozitiv al rezultantei și s-ar uita la sensul pozitiv al vectorului moment $\bar{M}_O$.

Putem spune deci că *toate sistemele de forțe care se reduc într-un punct oarecare din spațiu la un vector rezultantă și un vector moment rezultant, perpendiculari unul pe celălalt, se pot reduce încă numai la o singură rezultantă.* În această situație se află toate sistemele de forțe examinate mai sus, cu excepția sistemelor de cupluri în plan și spațiu și a sistemelor de forțe oarecare în spațiu.

Formula (2.12) se mai poate scrie și sub forma :

$$M_O = Rd. \qquad (2.13)$$

M_O reprezintă momentul rezultant al sistemului de forțe în raport cu punctul în care s-a făcut reducerea ; el este egal cu suma momentelor forțelor componente în raport cu acest punct. Din relația (2.13) rezultă că el mai este egal și cu momentul rezultantei în raport cu același punct.

Pentru toate sistemele de forțe la care, efectuînd reducerea într-un punct, se obțin ca elemente de reducere doi vectori perpendiculari (rezultanta și momentul rezultant), putem enunța deci două teoreme :

— toate aceste sisteme se reduc la o rezultantă unică, care se consideră determinată atunci cînd i se cunosc mărimea, orientarea și suportul în lungul căruia acționează ;

— pentru toate aceste sisteme, o dată determinată rezultanta, suma momentelor tuturor forțelor sistemului în raport cu un punct oarecare din spațiu (momentul rezultant) este egală cu momentul rezultantei în raport cu același punct.

Ultima teoremă este cunoscută sub denumirea de *teorema lui Varignon* și are multe aplicații practice.



6. Metode generale pentru reducerea sistemelor de forțe

În cele de mai sus am întrebuințat pentru reducerea sistemelor de forțe metoda vectorială. Această metodă este foarte sugestivă, însă nu poate fi aplicată întotdeauna în practică la rezolvarea problemelor privind reducerea diferitelor sisteme de forțe. De aceea, vom prezenta în continuare două metode practice pentru rezolvarea acestor probleme.

a) **Metoda analitică.** După cum am văzut mai sus, atunci cînd efectuăm reducerea unui sistem de forțe obținem în punctul de reducere fie două sisteme de vectori forțe sau cupluri coliniari, fie două sisteme de vectori forțe sau cupluri concurenți. Adunarea acestor vectori în punctul de reducere se face după regula paralelogramului.

Să introducem acum în punctul de reducere O un sistem de trei axe triortogonal $Oxyz$ și să proiectăm pe aceste axe vectorii din punctul de reducere; în baza teoremei proiecțiilor, proiecția vectorului forță rezultantă pe fiecare dintre axe este egală cu suma proiecțiilor forțelor componente și de asemenea proiecția vectorului moment rezultant pe fiecare dintre axe este egală cu suma proiecțiilor momentelor componente; aceasta se scrie astfel:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} \\ M_x &= M_{1x} + M_{2x} + \ldots + M_{nx} \\ M_y &= M_{1y} + M_{2y} + \ldots + M_{ny} \\ M_z &= M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Aceste expresii se mai notează uneori pentru prescurtare cu ΣF_{ix} etc. semnul Σ însemnînd suma termenilor, în care indicele i primește succesiv valorile 1, 2, ..., n.

Cu ajutorul acestor formule putem afla elementele de reducere ale oricărui sistem de forțe în raport cu un punct oarecare din spațiu; pentru aceasta, vom calcula proiecția fiecărei forțe pe fiecare dintre axele sistemului și momentul fiecăreia dintre forțe în raport cu fiecare dintre axele sistemului, după care le vom însuma. Cu ajutorul lor putem determina complet vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}_O$ astfel:

— modulul vectorilor $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$ este egal cu lungimea diagonalei paralelipipedului construit pe proiecţiile vectorilor; deci:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (2.15)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (2.16)$$

Unghiurile formate de fiecare dintre vectorii $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$ cu axele Ox, Oy, Oz se determină din triunghiurile dreptunghice care au ca ipotenuză pe $\overline{R}$ (respectiv $\overline{M}_O$), iar una dintre catete este cîte o proiecţie R_x, R_y, R_z, (respectiv M_x, M_y, M_z) (fig. 2.35).

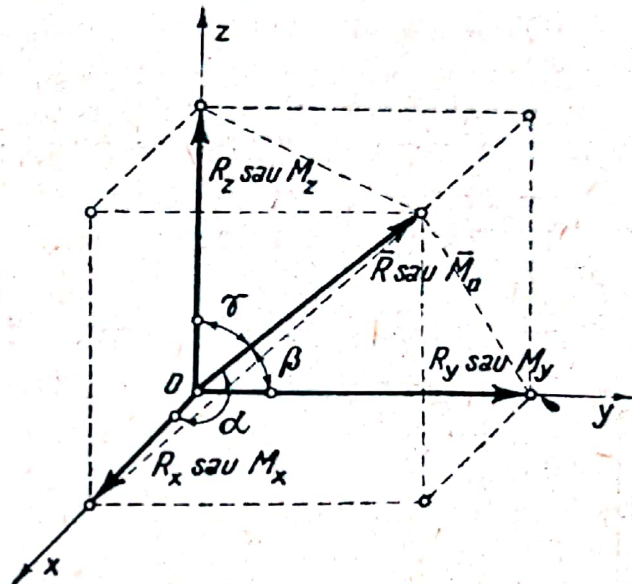


Fig. 2.35.

Notînd cu α, β, γ unghiurile formate respectiv cu axele Ox, Oy, Oz avem:

Pentru rezultanta $\overline{R}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{R_x}{R} \\ \cos\beta = \dfrac{R_y}{R} \\ \cos\gamma = \dfrac{R_z}{R} \end{cases} \quad (2.17)$$

Pentru momentul rezultant $\overline{M}_O$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{M_x}{M_O} \\ \cos\beta = \dfrac{M_y}{M_O} \\ \cos\gamma = \dfrac{M_z}{M_O} \end{cases} \quad (2.18)$$

b) **Indicaţii metodice privind reducerea pe cale analitică a sistemelor de forţe.** Din punct de vedere practic, pentru reducerea unui sistem de forţe într-un punct la forma cea mai simplă,

adică la un singur vector forţă rezultantă şi un singur vector moment rezultant, se procedează astfel :

— se alege un sistem de referinţă avînd originea în punctul de reducere ;

— se calculează proiecţia fiecărei forţe pe axele Ox, Oy, Oz ale sistemului $Oxyz$ şi apoi se însumează toate proiecţiile de pe axa Ox, respectiv de pe axa Oy şi apoi de pe axa Oz ;

— se calculează momentul fiecărei forţe în raport cu axele Ox, Oy, Oz şi se însumează toate momentele în raport cu axa Ox, apoi în raport cu axa Oy şi apoi în raport cu axa Oz ;

— se calculează modulul rezultantei şi al momentului rezultant cu formulele (2.15) şi (2.16) ;

— se calculează unghiurile făcute de vectorul forţă rezultantă şi momentul rezultant cu axele de coordonate cu formulele (2.17) şi (2.18) ;

— se figurează cei doi vectori $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$;

— dacă $\overline{R} \perp \overline{M}_O$ se determină suportul rezultantei cu formula (2.12).

Pentru sistematizare, calculele privind reducerea unui sistem de forţe într-un punct se trec în tabelele 2.1 şi 2.2.

Tabela 2.1

Proiecţiile forţelor şi momentelor în raport cu axele

Forţa	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
F_1						
F_2						
⋮						
Suma →						

c) **Metoda grafică.** La rezolvarea multor probleme de statică se pot aplica procedee grafice. Ele prezintă avantajul faţă de procedeele analitice că permit ca într-o singură figură să se poată cuprinde întreaga problemă în ansamblul ei, iar rezultatele obţinute să fie sugestive, uşurînd găsirea greşelilor care eventual s-ar strecura.

Calculul analitic nu prezintă acest avantaj, rezolvarea problemei se desfăşoară fără a fi sugestivă, dar, în schimb, permite obţinerea unui rezultat cu o exactitate cît de mare dorim.

Datorită uşurinţei de aplicare în rezolvarea unor probleme de statică, într-o serie de cazuri practice, procedeele grafice sînt mai avantajoase decît cele analitice. De aceea ele sînt foarte

folositoare, în special atunci cînd trebuie să studiem mai multe variante spre a alege pe cea mai avantajoasă.

În cele ce urmează vom descrie cîteva procedee grafice mai importante, folosite la rezolvarea problemelor de reducere a sistemelor de forțe.

Compunerea forțelor concurente, poligonul forțelor (fig. 2.36). După cîte am văzut mai sus, un sistem de forțe concurente se reduce în punctul de concurență la o singură rezultantă. Obținerea acestei rezultante se face aplicînd din aproape în aproape regula paralelogramului. Astfel, compunînd între ele forțele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ obținem rezultanta $\overline{R_2}$, care la rîndul său compusă cu forța $\overline{F_3}$ ne dă rezultanta $\overline{R_3}$ ș.a.m.d. (fig. 2.36, *a*). Rezultanta $\overline{R}$ se mai poate obține și astfel: se duc dintr-un punct arbitrar, *a*, vectori echipolenți cu vectorii dați, astfel încît originea fiecăruia dintre ei să coincidă cu extremitatea celui dinaintea sa (fig. 2.36, *b*); linia de închidere a poligonului astfel obținut este rezultanta sistemului considerat.

Tabela 2.2

Elemente de reducere

Mărimea	Rezultanta	Momentul rezultant
Proiecția pe Ox		
Proiecția pe Oy		
Proiecția pe Oz		
Modulul		
cos α		
cos β		
cos γ		

Dacă punctele *a* și *n* coincid, atunci rezultanta este nulă și sistemul forțelor se află în echilibru.

Descompunerea unei forțe după două direcții date (fig. 2.37, *a*). Fie $\overline{F}$ forța dată și Δ_1, Δ_2 cele două direcții. Pentru a o descompune în componentele $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$, ducem prin punctul său de aplicație două paralele OA și OB la direcțiile Δ_1 și Δ_2 (fig. 2.37, *b*). Alte două paralele la aceleași direcții duse prin vîrful forței $\overline{F}$ determină pe direcțiile OA și OB vîrfurile *1* și *2* ale celor două componente $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$.

Descompunerea unei forțe după trei direcții coplanare neconcurente cu forța (fig. 2.38, *a*). Fie $\overline{F}$ forța dată și Δ_1, Δ_2, Δ_3 cele trei direcții. Pentru a descompune forța $\overline{F}$ după cele trei

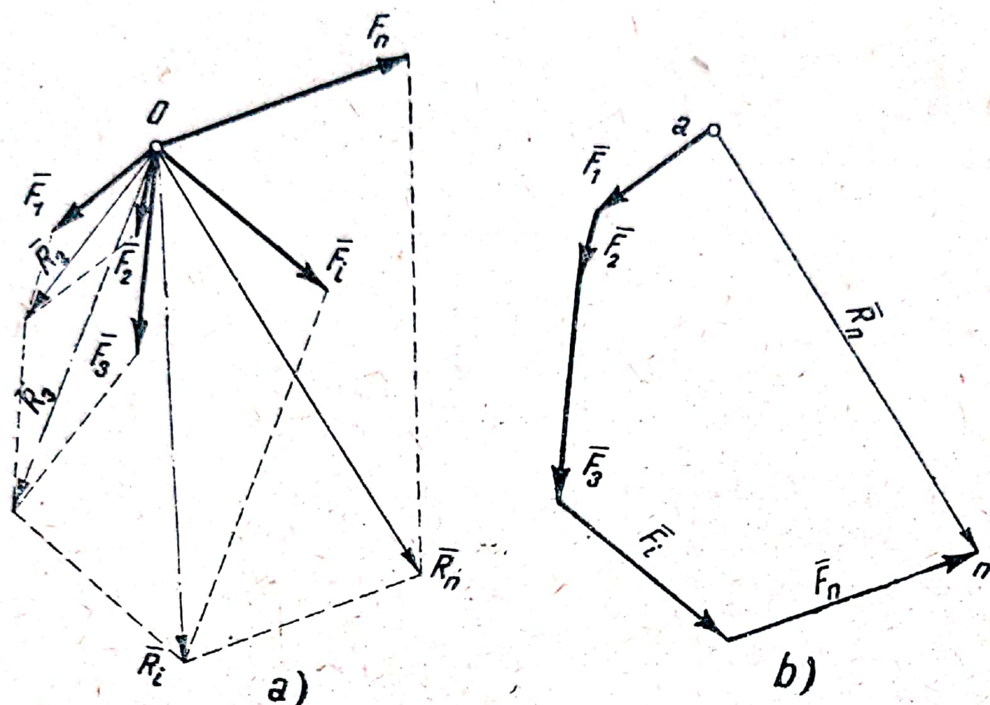


Fig. 2.36.

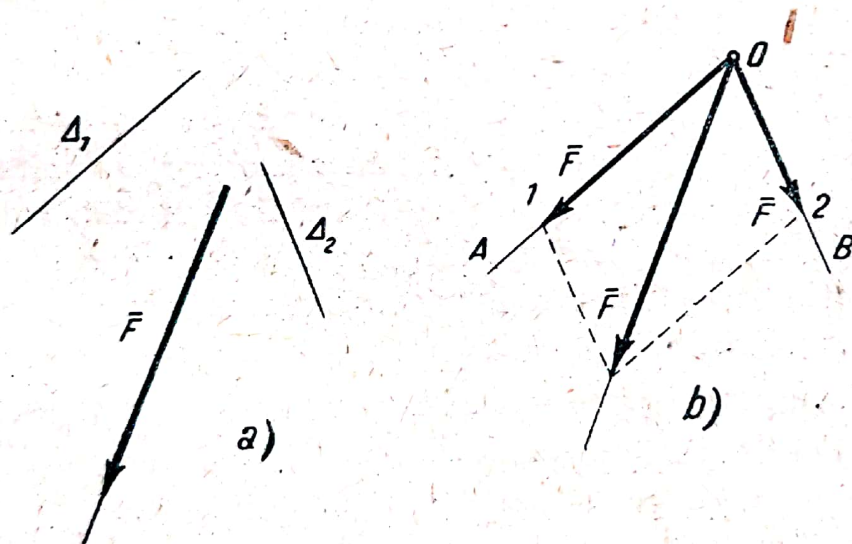


Fig. 2.37.

direcții date, intersectăm suportul său cu una dintre direcții, de exemplu cu direcția Δ_1, în punctul *a* și apoi unim acest punct cu punctul *b* de inersecție a celorlalte două direcții, obținînd astfel direcția ajutătoare Δ (fig. 2.38, *b*). Alunecăm apoi forța

$\overline{F}$ pe suport pînă cînd punctul său de aplicaţie coincide cu punctul *a* şi o descompunem după direcţiile Δ_1 şi Δ obţinînd componentele $\overline{F_1}$ şi $\overline{F_\Delta}$. Componenta $\overline{F_\Delta}$ o deplasăm pe suportul

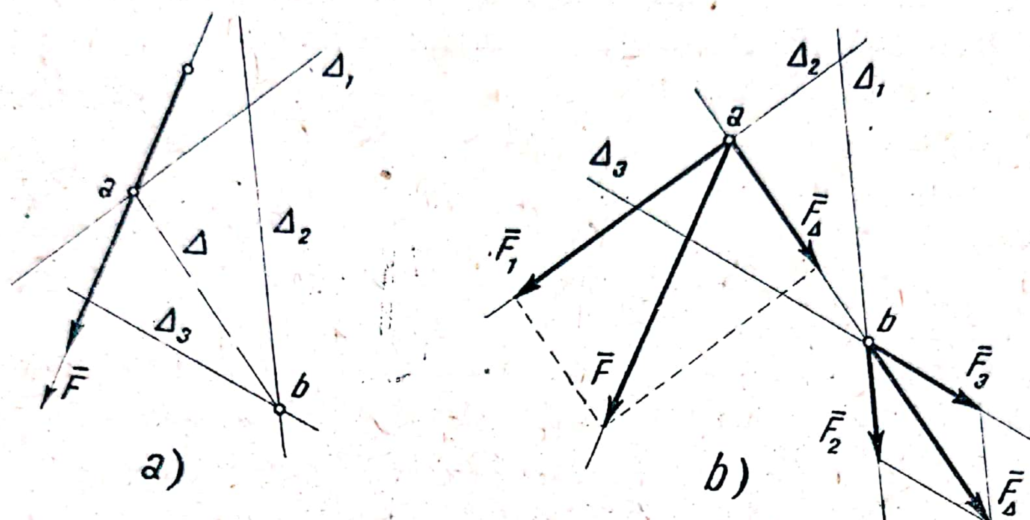


Fig. 2.38.

său pînă ce punctul său de aplicaţie ajunge în *b* şi o descompunem după direcţiile Δ_2 şi Δ_3 în componentele $\overline{F_2}$ şi $\overline{F_3}$. Componentele $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, şi $\overline{F_3}$ sînt cele căutate.

Reducerea sistemelor de forţe coplanare; poligonul funicular. Pentru reducerea sistemelor de forţe coplanare, s-ar putea proceda ca şi în cazul forţelor concurente, alunecînd vectorii pe suporturile lor şi compunîndu-i doi cîte doi, dar acest procedeu este greoi şi incomod. De aceea, în practică se foloseşte o altă metodă, mai expeditivă, denumită *metoda poligonului funicular*.

Să considerăm un sistem de forţe coplanare, spre exemplu sistemul format de cele patru forţe $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ şi $\overline{F_4}$ din figura 2.39, *a*. Construim pentru acest sistem de forţe poligonul forţelor *abcde* (fig. 2.39, *b*). Dacă poligonul forţelor se va închide, există două posibilităţi : sau sistemul este în echilibru, sau se reduce la un

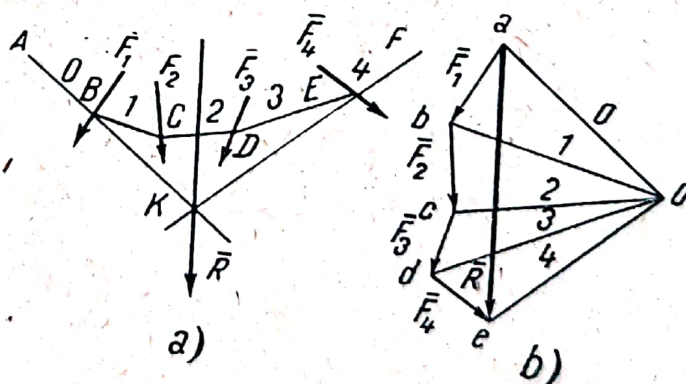


Fig. 2.39.

cuplu; astfel, închiderea poligonului forțelor este o condiție de echilibru necesară, dar nu și suficientă. Dacă însă poligonul forțelor este deschis, atunci sistemul de forțe se reduce numai la o rezultantă, așa cum se întîmplă în cazul din figura 2.39 unde dreapta de închidere *ae* a liniei frînte *abcde* dă mărimea, direcția și sensul rezultantei. Pentru a cunoaște complet rezultanta $\bar{R}$, este necesar să-i găsim un punct prin care trece suportul său.

Pentru rezolvarea acestei ultime probleme, vom lua un punct oarecare *O* din plan pe care-l vom numi *pol* și pe care-l vom uni cu vîrfurile *a, b, c, d, e* prin niște drepte pe care le vom numi *raze polare*. Luăm acum un punct arbitrar *A* al planului și ducem prin el dreapta *AB*, paralelă cu raza polară *O*, pînă în punctul *B* unde această dreaptă intersectează suportul forței $\bar{F}_1$; prin punctul *B* ducem dreapta *BC*, paralelă cu raza polară *1*, pînă în punctul *C* unde ea intersectează suportul forței $\bar{F}_2$ ș.a.m.d. Prin punctul *E* vom duce dreapta *EF* paralelă la raza polară *4*. Astfel vom obține linia poligonală *ABCDEF*, pe care o vom denumi poligon funicular. Folosindu-ne de construcția razelor din poligonul forțelor, forța $\bar{F}_1$ se poate descompune în două forțe *O* și *1*, paralele și egale cu aceste raze. Forța *O* este dirijată înspre punctul *O*, iar forța *1* dinspre punctul *O*. Mutînd aceste forțe în punctul *B* vom observa că de fapt am efectuat descompunerea forței $\bar{F}_1$ în două forțe paralele cu razele *O* și *1* după legea paralelogramului (fig. 2.40). Tot astfel forța $\bar{F}_2$ poate fi descompusă în două forțe, *1* și *2*, dintre care prima este dirijată înspre punctul *O*, iar a doua dinspre punctul *O*.

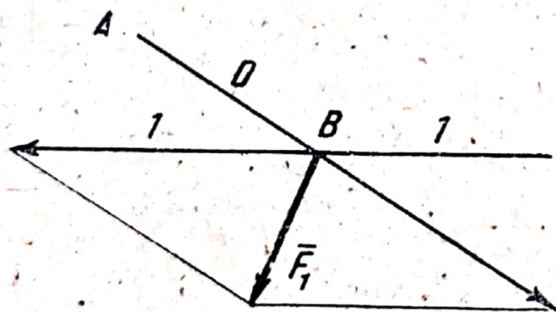


Fig. 2.40.

Mutînd aceste forțe în poligonul funicular vedem că de-a lungul laturii sale *1* se vor așeza două forțe egale cu raza polară *1*, dar dirijate în sensuri opuse. Continuînd această construcție vom găsi că sistemul de forțe date $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ se poate înlocui cu forțe care merg de-a lungul laturilor poligonului funicular. De-a lungul fiecărei laturi intermediare *1, 2* și *3* sînt dirijate

cîte două forţe egale şi direct opuse, care se echilibrează între ele. Rămîn neechilibrate numai cele două forţe extreme *O* şi *4*, egale cu razele polare *O* şi *4*. Astfel, sistemul celor patru forţe date s-a redus numai la două forţe concurente *O* şi *4*. Prelungind suporturile lor vom obţine punctul *K* prin care trebuie să treacă rezultanta lor $\overline{R}$. Cum direcţia şi mărimea acestei rezultan-

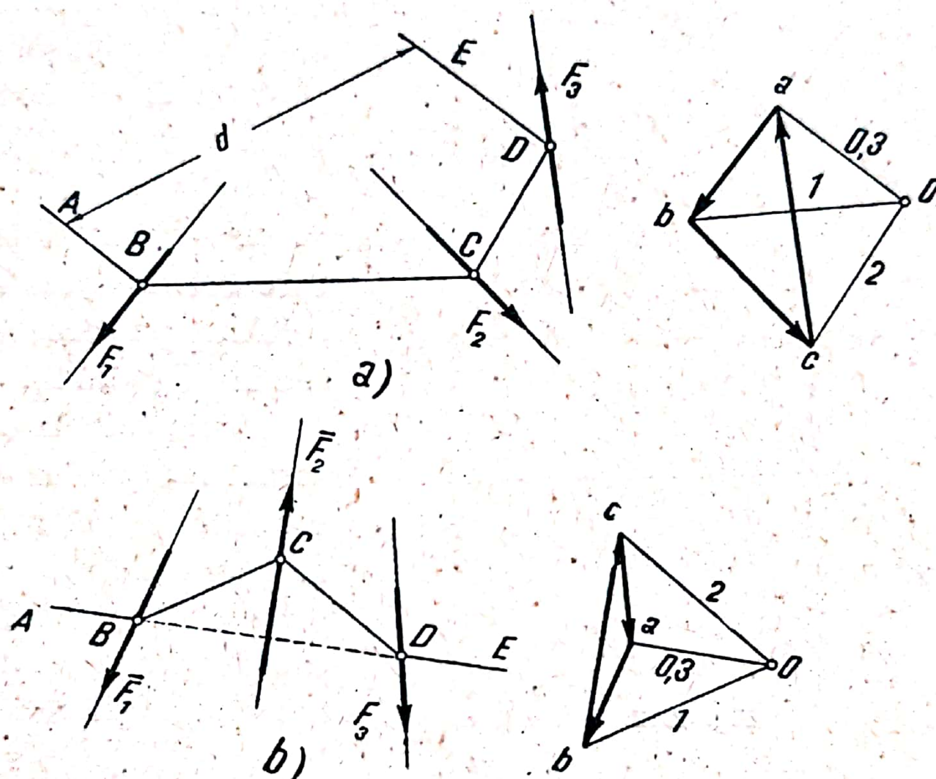


Fig. 2.41.

te sînt cunoscute din poligonul forţelor, ducem prin punctul *K* un vector echipolent cu vectorul *ae* şi problema este complet rezolvată.

În cazul în care segmentul *ae* este nul, pot apărea două situaţii:

— poligonul funicular *ABCDE* are prima latură *AB* şi ultima latură *DE* paralele (fig. 2.41, *a*); sistemul se reduce la un cuplu, al cărui moment este egal cu produsul dintre lungimea laturii *O* (sau *3*) cu distanţa *d* dintre aceste două laturi;

— prima latură *AB* şi ultima latură *DE* a poligonului funicular coincid (fig. 2.41, *b*); sistemul se află în echilibru.

7. Reducerea sistemelor de forțe paralele considerate ca vectori legați

a) Calculul analitic al elementelor de reducere. Să presupunem că avem un sistem de forțe paralele compus din forțele: $\overline{F}_1$, aplicată în A_1 (x_1, y_1, z_1), $\overline{F}_2$, aplicată în A_2 $(x_2, y_2, z_2), \ldots,$ F_n aplicată în A_n (x_n, y_n, z_n). Forțele sînt toate paralele cu direcția Δ care face cu axele Ox, Oy, Oz respectiv unghiurile α, β, γ, ele putînd fi îndreptate într-un sens sau în celălalt pe această direcție (fig. 2.42).

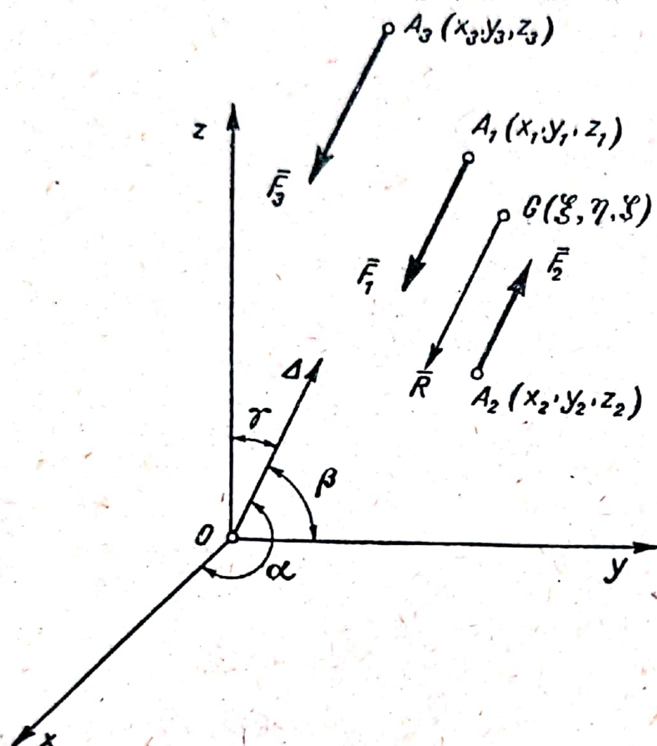


Fig. 2.42.

Vom calcula cu ajutorul formulelor (2.14) elementele de reducere ale acestui sistem în originea O a axelor de coordonate. Avem pentru rezultantă:

$$\begin{aligned} R_x &= F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha + \ldots + F_n \cos\alpha = \\ &= \cos\alpha\,(F_1 + F_2 + \ldots + F_n), \\ R_y &= F_1 \cos\beta + F_2 \cos\beta + \ldots + F_n \cos\beta = \\ &= \cos\beta\,(F_1 + F_2 + \ldots + F_n), \\ R_z &= F_1 \cos\gamma + F_2 \cos\gamma + \ldots + F_n \cos\gamma = \\ &= \cos\gamma\,(F_1 + F_2 + \ldots + F_n). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Suma din paranteză reprezintă suma modulelor forțelor, luate cu semnul + dacă ele sînt îndreptate în sensul pozitiv de pe axa Δ, sau cu semnul — dacă ele sînt îndreptate în sens negativ.

Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = (F_1 + F_2 + \ldots F_n)\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = \\ = F_1 + F_2 + \ldots + F_n, \tag{2.20}$$

deoarece oricare ar fi unghiurile α, β, γ făcute de o dreaptă în spaţiu cu axele Ox, Oy, Oz avem totdeauna :

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Din formulele (2.19) rezultă :

$$R_x=R\cos\alpha,$$
$$R_y=R\cos\beta, \qquad (2.21)$$
$$R_z=R\cos\gamma.$$

Aceste relaţii ne arată că rezultanta este paralelă cu direcţia comună a forţelor, deoarece ea face cu axele aceleaşi unghiuri α, β, γ pe care le face şi dreapta Δ.

Pentru calculul momentului rezultant aplicăm formulele (2.10) ; pentru una dintre forţe, spre exemplu pentru forţa $\overline{F}_1$, avem :

$$M_{1x}=y_1F_{1z}-z_1F_{1y}=F_1(y_1\cos\gamma-z_1\cos\beta),$$
$$M_{1y}=z_1F_{1x}-x_1F_{1z}=F_1(z_1\cos\alpha-x_1\cos\gamma), \qquad (2.22)$$
$$M_{1z}=x_1F_{1y}-y_1F_{1x}=F_1(x_1\cos\beta-y_1\cos\alpha).$$

Scriind expresiile momentelor tuturor forţelor şi însumînd rezultatele, obţinem :

$$M_x=\cos\gamma(F_1y_1+F_2y_2+\ldots+F_ny_n)-$$
$$-\cos\beta(F_1z_1+F_2z_2+\ldots+F_nz_n),$$
$$M_y=\cos\alpha(F_1z_1+F_2z_2+\ldots+F_nz_n)-$$
$$-\cos\gamma(F_1x_1+F_2x_2+\ldots+F_nx_n), \qquad (2.23)$$
$$M_z=\cos\beta(F_1x_1+F_2x_2+\ldots+F_nx_n)-$$
$$-\cos\alpha(F_1y_1+F_2y_2+\ldots+F_ny_n).$$

b) **Centrul forţelor paralele.** Să presupunem că rezultanta este aplicată într-un punct $G(\xi, \eta, \zeta)$; ne propunem să aflăm coordonatele acestui punct ca funcţii de datele noastre : modulele forţelor, coordonatele punctelor lor de aplicaţie şi unghiurile lor α, β, γ cu axele de coordonate. Pentru aceasta, vom aplica teorema lui Varignon în raport cu una dintre axele sistemului $Oxyz$, spre exemplu în raport cu axa Ox. Momentul rezultantei în raport cu această axă este după prima formulă (2.10) :

$$M_x=\eta R_z-\zeta R_y.$$

Înlocuind valorile lui R_y şi R_z după formulele (2.19) obţinem:

$$M_x^* = \eta \cos\gamma (F_1 + F_2 + \ldots + F_n) - \zeta \cos\beta (F_1 + F_2 + \ldots + F_n).$$

Dar suma momentelor forţelor sistemului în raport cu axa Ox este proiecţia momentului rezultant pe această axă. Aceasta înseamnă că va trebui să egalăm valoarea lui M_x (momentul rezultantei) cu aceea calculată după prima formulă (2.23); obţinem ecuaţia:

$$\cos\gamma (F_1y_1 + F_2y_2 + \ldots + F_ny_n) - \cos\beta (F_1z_1 + F_2z_2 + \ldots + F_nz_n) =$$
$$= \eta \cos\gamma (F_1 + F_2 + \ldots + F_n) - \zeta \cos\beta (F_1 + F_2 + \ldots + F_n).$$

Această ecuaţie care conţine două necunoscute (η şi ζ) este verificată de soluţiile:

$$\eta = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \ldots + F_ny_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n},$$
$$\zeta = \frac{F_1z_1 + F_2z_2 + \ldots + F_nz_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n}. \tag{2.24}$$

Ne putem convinge uşor luînd numai două forţe F_1 şi F_2, pentru care avem:

$$\cos\gamma (F_1y_1 + F_2y_2) - \cos\beta (F_1z_1 + F_2z_2) = \frac{F_1y_1 + F_2y_2}{F_1 + F_2} \cos\gamma (F_1 + F_2) -$$
$$- \frac{F_1z_1 + F_2z_2}{F_1 + F_2} \cos\beta (F_1 + F_2).$$

Efectuînd reducerile se obţine o identitate.

În mod analog, utilizînd ecuaţia de momente în raport cu axa Oy, se obţine şi

$$\xi = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n}. \tag{2.25}$$

Punctul G(ξ, η, ζ), ale cărui coordonate sînt date de formulele (2.24) şi (2.25) se numeşte *centrul forţelor paralele*. El se bucură de următoarele două proprietăţi:

— *poziţia sa este independentă de direcţia comună a forţelor paralele*, deoarece formulele (2.24) şi (2.25) nu conţin unghiurile α, β, γ; aceasta înseamnă că dacă rotim toate forţele în jurul punctelor lor de aplicaţie în acelaşi sens şi cu acelaşi unghi, poziţia centrului forţelor paralele nu se schimbă, iar

rezultanta R se va roti şi ea o dată cu forţele în jurul aceluiaşi punct;

— *dacă toate forţele devin de un acelaşi număr de ori mai mari*, adică spre exemplu, dacă forţa F_1 devine $3F_1$, forţa F_2 devine $3F_2$ ş.a.m.d., *poziţia centrului forţelor paralele de asemenea nu se modifică*, deoarece factorul comun care multiplică valoarea forţelor apare atît la numărător cît şi la numitor şi se simplifică.

Centrul forţelor paralele joacă un rol foarte important atunci cînd forţele paralele sînt greutăţi ale particulelor materiale care compun un corp; în acest caz el se numeşte *centrul de greutate.*

c) **Forţele de greutate ale particulelor componente ale unui corp considerate ca un sistem de forţe paralele.** Se ştie că sub acţiunea forţei de atracţie universală, numită şi *forţa gravitaţiei*, fiecare particulă materială aflată pe suprafaţa Pămîntului este atrasă de Pămînt, iar forţa de gravitaţie este dirijată către centrul Pămîntului. Pentru un anumit corp, forţele de gravitaţie ale particulelor sale formează un sistem de forţe concurente în centrul Pămîntului; totuşi, fără a comite o eroare prea mare, vom putea considera aceste forţe ca un sistem de forţe paralele, fapt care uşurează mult calculul punctului de aplicaţie al rezultantei acestor forţe.

Pentru a evalua ordinul de mărime al erorii comise, să examinăm două direcţii ale forţei de gravitaţie, care formează între ele un unghi de 90° corespunzînd deci cu direcţiile forţelor de atracţie de la pol şi de la ecuator. Pentru a trece de la pol la ecuator, va trebui să ne deplasăm cu un sfert din meridianul pămîntesc, adică cu 10 000 000 m. Pentru ca unghiul dintre două drepte să fie egal cu o secundă de grad, va trebui să ne deplasăm cu:

$$\frac{10\,000\,000}{90 \times 60 \times 60} = 30{,}9 \text{ m}$$

Aceasta înseamnă că forţele de gravitaţie a două particule situate la extremităţile unui corp avînd lungimea de 30,9 m fac între ele un unghi de o secundă. De aici rezultă că, cu o aproximaţie foarte bună, forţele de atracţie ale corpurilor cu dimensiuni mici situate la suprafaţa Pămîntului se pot considera paralele între ele.

Fie dat un corp material; să despărţim acest corp în particule foarte mici. Fiecare particulă a corpului este atrasă de Pămînt; sistemul forţelor de atracţie ale tuturor particulelor

poate fi considerat ca un sistem de forțe paralele în plan sau în spațiu.

Rezultanta forțelor paralele care constituie greutățile tuturor particulelor unui corp material este *greutatea* acestui corp, iar centrul acestor forțe paralele este centrul de greutate al corpului respectiv. El este un punct geometric, care nu trebuie confundat cu vreo particulă a corpului.

d) **Formulele pentru determinarea centrului de greutate la corpuri oarecare.** După cum am arătat mai sus, centrul forțelor paralele nu-și schimbă poziția în spațiu atunci cînd rotim toate forțele de același unghi în jurul punctelor lor de aplicație rămase fixe. Pe această observație se întemeiază metoda de determinare experimentală a centrului de greutate prin atîrnare în diferite puncte ale sale. Prin rotirea corpului față de Pămînt, centrul de greutate păstrează o poziție bine determinată față de corp.

Pentru determinarea sa pe cale analitică, vom aplica formulele (2.24) și (2.25) în care forțele $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sînt acum greutățile $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ale particulelor care alcătuiesc corpul :

$$\xi = \frac{G_1x_1 + G_2x_2 + \ldots + G_nx_n}{G_1 + G_2 + G_n} = \frac{g(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n)}{g(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{M},$$

$$\eta = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{M}, \qquad (2.26)$$

$$\zeta = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_nz_n}{M},$$

unde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sînt masele particulelor și M masa totală a corpului, egală cu suma acestor mase ale particulelor.

Aplicarea practică a acestor formule este dificilă, deoarece numărul particulelor unui corp este infinit de mare, iar sumele de la numărător devin integrale. Dacă am reuși să împărțim corpul într-un număr finit de părți, ale căror greutăți și poziții ale centrelor de greutate să ne fie cunoscute, am putea calcula cu ușurință sumele de la numărătorii expresiilor (2.26), dacă acest număr de părți nu va fi prea mare.

e) **Formulele pentru determinarea centrului de greutate la corpuri omogene.** *Vom înțelege prin corpuri omogene acele corpuri la care materia este astfel repartizată încît greutatea specifică* (greutatea unității de volum) *este aceeași în orice punct al*

corpului. În general, corpurile din tehnică nu sînt, riguros vorbind, corpuri omogene, deoarece ele nu au exact aceeaşi compoziţie în toate punctele sau conţin o serie de incluziuni sau de goluri. Cu toate acestea, datorită faptului că abaterea greutăţii specifice a corpurilor de la o valoare medie este totuşi mică, vom considera corpurile întîlnite în tehnică drept corpuri omogene.

În cazul acestor corpuri formulele (2.26) se simplifică; într-adevăr dacă notăm cu γ greutatea specifică a corpului şi cu V volumul unei particule a corpului, greutatea acestei particule se exprimă prin relaţia $G = \gamma V$ $(G_1 = \gamma V_1, G_2 = \gamma V_2, \ldots)$; înlocuind în expresiile (2.26), greutatea specifică γ iese în factor comun, atît la numărător cît şi la numitor şi se simplifică, rămînînd:

$$\xi = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + \ldots + V_nx_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + \ldots + V_nx_n}{V},$$
$$\eta = \frac{V_1y_1 + V_2y_2 + \ldots + V_ny_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} = \frac{V_1y_1 + V_2y_2 + \ldots + V_ny_n}{V}; \quad (2.27)$$
$$\zeta = \frac{V_1z_1 + V_2z_2 + \ldots + V_nz_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} = \frac{V_1z_1 + V_2z_2 + \ldots + V_nz_n}{V}.$$

Acestea sînt formulele pentru calculul centrului de greutate al volumelor omogene.

Dacă este vorba de un corp la care două dintre dimensiuni (lungimea şi lăţimea) sînt mult mai mari decît cea de-a treia (grosimea), corp denumit *placă*, considerată omogenă, greutatea unei particule se exprimă printr-o formulă similară celei din cazul volumelor, şi anume $G = \gamma A$, în care γ este greutatea specifică a unităţii de suprafaţă, iar A un element de arie al plăcii $(G_1 = \gamma A_1, G_2 = \gamma A_2, \ldots)$. Introducînd în formulele (2.26) şi simplificînd cu γ, obţinem formulele pentru calculul centrului de greutate al plăcilor omogene:

$$\xi = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n}{A},$$
$$\eta = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \ldots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \ldots + A_ny_n}{A}, \quad (2.28)$$
$$\zeta = \frac{A_1z_1 + A_2z_2 + \ldots + A_nz_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \frac{A_1z_1 + A_2z_2 + \ldots + A_nz_n}{A},$$

A fiind aria totală a plăcii.

Procedînd în mod analog în cazul corpurilor la care una dintre dimensiuni (lungimea) este mult mai mare decît celelalte două, corpuri denumite *bare* sau *fire*, considerate omogene, vom exprima greutatea unui element de lungime prin formula $G = \gamma l$, γ fiind greutatea specifică a unității de lungime, iar l un element de lungime al barei sau firului. Introducînd în formulele (2.26) și simplificînd cu γ, obținem formulele pentru calculul centrului de greutate al barelor omogene:

$$\xi = \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n} = \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n}{L},$$
$$\eta = \frac{l_1y_1 + l_2y_2 + \ldots + l_ny_n}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n} = \frac{l_1y_1 + l_2y_2 + \ldots + l_ny_n}{L}, \qquad (2.29)$$
$$\varphi = \frac{l_1z_1 + l_2z_2 + \ldots + l_nz_n}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n} = \frac{l_1z_1 + l_2z_2 + \ldots + l_nz_n}{L},$$

L fiind lungimea totală a barei sau firului.

Formulele (2.27), (2.28) și (2.29) conțin numai elementele geometrice ale corpului respectiv: lungimi, arii, volume, fapt care arată că *la corpurile omogene poziția centrului de greutate depinde numai de forma lor geometrică.*

f) **Centrele de greutate ale corpurilor simetrice.** Foarte multe dintre piesele și organele mașinilor sînt corpuri avînd un plan, o axă sau un centru de simetrie; la aceste corpuri, centrul de greutate se află în planul de simetrie, pe axa de simetrie sau în centrul de simetrie al corpului respectiv.

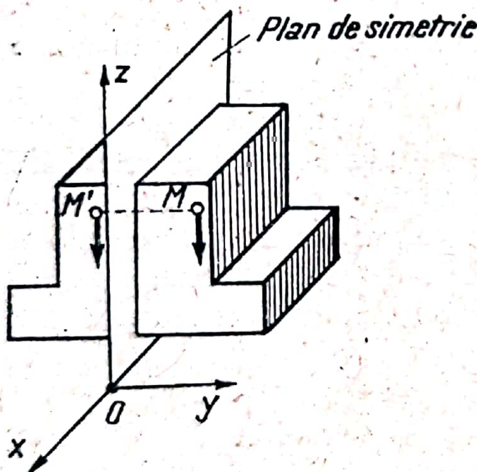


Fig. 2.43.

Într-adevăr, după cum rezultă din figura 2.43, în care am reprezentat un corp avînd un plan de simetrie, pe care l-am ales ca plan xOz al sistemului de referință, fiecărui punct M, avînd ordonata y, în jurul căruia luăm elementul de volum V îi corespunde în stînga planului de simetrie un alt punct M' (simetricul lui M), avînd în jurul său un volum V, dar a cărui ordonată este $-y$. Aceasta înseamnă că în cea de-a doua formulă (2.27) suma de la numărător va conține o serie de termeni pozitivi și negativi care se vor reduce și o serie de termeni nuli corespunzînd punc-

telor din planul de simetrie care au ordonata η nulă. Rezultă $\eta = 0$, adică centrul de greutate al corpului se află în planul de simetrie xOz. Celelalte proprietăţi enunţate se demonstrează în acelaşi mod.

În figura 2.44 sînt reprezentate o serie de corpuri omogene avînd axe sau centre de simetrie, precum şi poziţiile centrelor de greutate.

g) **Centrele de greutate ale corpurilor simple.** *Centrul de greutate al unei linii frînte omogene înscrise într-un cerc.* Fie

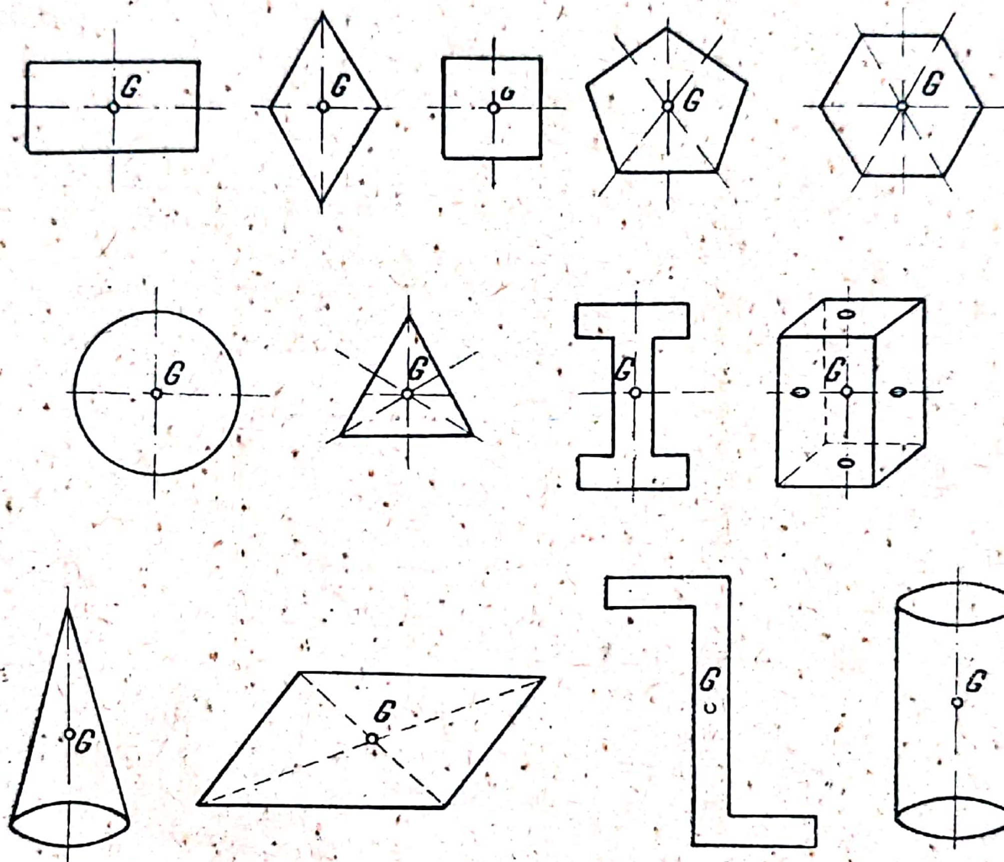


Fig. 2.44.

dată linia frîntă omogenă $ABCDEF$, tangentă unui cerc de rază R şi centrul O (fig. 2.45), elementele liniei fiind de lungimi egale.

Presupunem că linia frîntă cuprinde cel mult jumătate din circumferinţă. Ducînd axa de simetrie Ox rezultă că centrul său de greutate trebuie să se afle pe această axă. Pentru aceasta aplicăm prima dintre formulele (2.29)

$$\xi = \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n}{L}. \tag{2.30}$$



Să luăm spre exemplu latura AB. Pentru această latură avem $l_1 = AB = l$ şi $x_1 = OH$. Din triunghiurile asemenea OHG şi $AA'B$ deducem :

$$\frac{OH}{AA'} = \frac{OG}{AB},$$

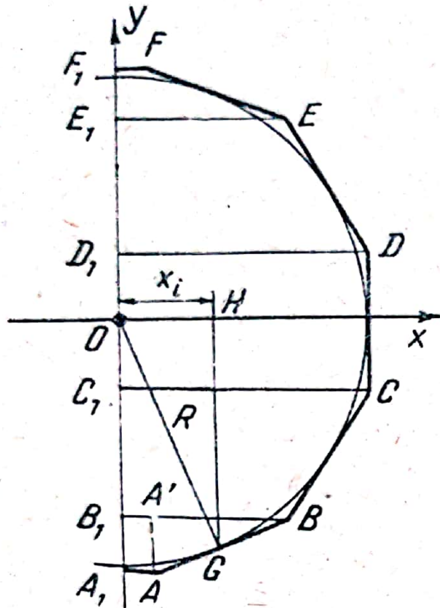


Fig. 2.45.

de unde :

$$AB \cdot OH = l_1 x_1 = AA' \cdot OG = A_1B_1 \cdot R.$$

Procedînd analog şi pentru celelalte legmente vom obţine, înlocuind în sormula (2.30) :

$$\xi = \frac{A_1B_1 \cdot R + B_1C_1 \cdot R + \ldots + E_1F_1 \cdot R}{AB + BC + \ldots + EF}.$$

Dacă notăm cu d lungimea proiecţiei liniei frînte pe axa Oy şi cu L lungimea liniei frînte, adică :

$$d = A_1B_1 + B_1C_1 + \ldots + E_1F_1$$

$$L = AB + BC + \ldots + EF,$$

obţinem :

$$\xi = R\frac{d}{l}. \qquad (2.31)$$

Centrul de greutate al unui arc omogen (fig. 2.46). Notăm cu 2α unghiul la centru al arcului şi cu R raza sa. Dacă considerăm arcul ABC ca limită a unei linii frînte regulate la care numărul laturilor creşte nelimitat, iar lungimea fiecărei laturi tinde către zero, putem aplica formula (2.31) în care :

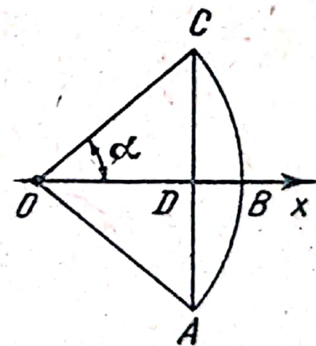


Fig. 2.46.

$$d = AC = 2R\sin\alpha,$$

$$L = R \cdot 2\alpha.$$

Introducînd în formula (2.31) obţinem :

$$\xi = R\frac{2R\sin\alpha}{R\,2\alpha} = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha}. \qquad (2.32)$$

Dacă aplicăm această formulă la o semicircumferinţă, pentru care $\alpha = \frac{\pi}{2}$ obţinem :

$$\xi = \frac{2R}{\pi} \approx 0,63662\ R.$$

Centrul de greutate al unei plăci omogene de formă triunghiulară. Fie ABC triunghiul al cărui centru de greutate se caută. Dacă împărţim suprafaţa sa în fîşii trapezoidale pe care le putem aproxima cu nişte dreptunghiuri foarte subţiri, paralele cu baza BC (fig. 2.47), ale căror centre de greutate se află pe mediana AF rezultă că centrul de greutate al triunghiului se va găsi undeva pe această mediană. Împărţind triunghiul în fîşii paralele cu latura AB şi raţionînd la fel, se ajunge la concluzia că centrul de greutate al triunghiului trebuie să se afle şi pe mediana CE; rezultă deci că *centrul de greutate al plăcii triunghiulare omogene se află la intersecţia medianelor.*

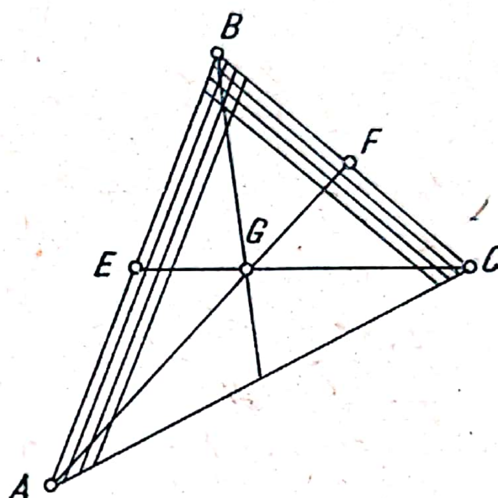


Fig. 2.47.

Centrul de greutate al sectorului circular. Fie sectorul circular OAB de rază R şi unghiul la centru 2α (fig. 2.48). Centrul său de greutate se află pe axa de simetrie Ox. Dacă împărţim sectorul în triunghiuri foarte mici avînd drept bază arcul (coarda) MN şi drept înălţime raza R, se constată că dacă se înlocuiesc aceste triunghiuri prin centrele lor de greutate se obţine un arc de cerc de rază $\frac{2}{3}R$.

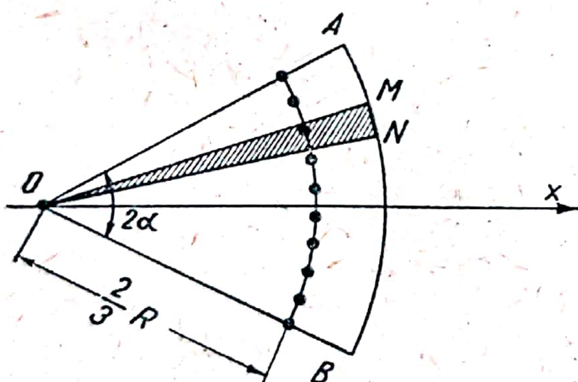


Fig. 2.48.

Problema s-a redus deci la aflarea centrului de greutate al acestui arc de cerc. Aplicînd formula (2.32) obţinem :

$$\xi = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \qquad (2.33)$$

h) **Centrul de greutate al corpurilor omogene compuse din părţi ale căror volume, arii sau lungimi şi centre de greutate sînt cunoscute.** În acest caz se procedează astfel:

— se raportează corpul la un sistem de trei axe dacă este un corp în spaţiu, sau de două axe dacă este vorba de o figură plană;

— se observă dacă corpul respectiv posedă anumite elemente de simetrie (plan, axă, centru de simetrie), ştiut fiind că centrul de greutate trebuie să se afle pe planul, axa sau în centrul de simetrie respectiv. În aceste cazuri, problema se simplifică, reducîndu-se numărul coordonatelor centrului de greutate; pentru aceasta axa sau planul de simetrie se aleg respectiv axă sau plan de coordonate;

— se împarte corpul în părţi ale căror volume, arii sau lungimi precum şi centre de greutate ne sînt cunoscute, astfel încît numărul acestora să fie cît mai mic, iar coordonatele centrelor lor de greutate cît mai uşor de aflat;

— se alcătuieşte o tabelă avînd numărul de linii egal cu numărul corpurilor componente ale corpului dat (tabela 2.3);

Tabela 2.3

Calculul poziţiei centrului de greutate al corpurilor

Nr.	V_i (A_i, l_i)	x_i	y_i	z_i	$V_i x_i$ $(A_i x_i, l_i x_i)$	$V_i y_i$ $(A_i y_i, l_i y_i)$	$V_i z_i$ $(A_i z_i, l_i z_i)$
Sume							

— se trece pe coloana V_i (sau A_i sau l_i) valoarea volumului (sau ariei sau lungimii) corpului component respectiv, iar pe următoarele trei coloane (x_i, y_i, z_i) coordonatele centrului său de greutate.

De observat că pe coloana V volumele părţilor corpului care lipsesc se trec cu semnul minus.

Celelalte operaţii pentru determinarea centrului de greutate se efectuează numai pe tabelă fără ajutorul figurii: se cal-

culează produsele $V_i x_i$, $V_i y_i$ şi $V_i z_i$ (respectiv $A_i x_i$, $l_i x_i$ etc.) precum şi sumele din josul coloanelor V_i, $V_i x_i$, $V_i y_i$, $V_i z_i$. Se împart apoi rezultatele însumării primelor trei coloane la prima, obţinîndu-se coordonatele căutate ale centrului de greutate.

8. Aplicaţii

a) La strunjirea unei piese cilindrice se constată cu ajutorul unui dinamometru că rezistenţele întîmpinate de cuţit au următoarele valori (fig. 2.49):

$$P_x = 450 \text{ kgf}, \; P_y = 630 \text{ kgf}, \; P_z = 1800 \text{ kgf}.$$

Se cere să se calculeze modulul rezultantei şi unghiurile sale de înclinare cu axele Ox, Oy şi Oz.

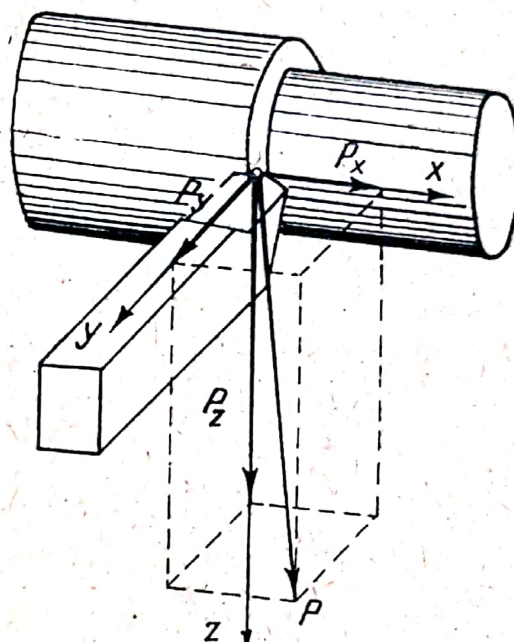


Fig. 2.49.

R e z o l v a r e

Modulul rezultantei se calculează cu formula (2.15):

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{450^2 + 630^2 + 1800^2} = 1\,960 \text{ kgf}.$$

Cosinusurile directoare ale suportului rezultantei cu axele Ox, Oy şi Oz se calculează cu formulele (2.17):

$$\cos\alpha = \frac{P_x}{P} = \frac{450}{1960} = 0{,}23; \; \cos\beta = \frac{P_y}{P} = \frac{630}{1960} = 0{,}32;$$

$$\cos\gamma = \frac{P_z}{P} = \frac{1800}{1960} = 0{,}92,$$

de unde rezultă:

$$\alpha = 76°41', \; \beta = 71°7', \; \gamma = 23°.$$

b) Se cere să se reducă sistemul celor două forţe paralele din figura 2.50, *a*, aplicate în punctele A şi B situate la distanţa a.

R e z o l v a r e

Orice sistem de forţe paralele în plan sau în spaţiu se reduce la o singură rezultantă; valoarea rezultantei şi poziţia punctului de aplicaţie nu se schimbă dacă toate forţele sistemului se rotesc în jurul punctelor de aplicaţie cu acelaşi unghi şi în acelaşi sens. Vom raţiona deci pe cazul din figura 2.50, *b*.

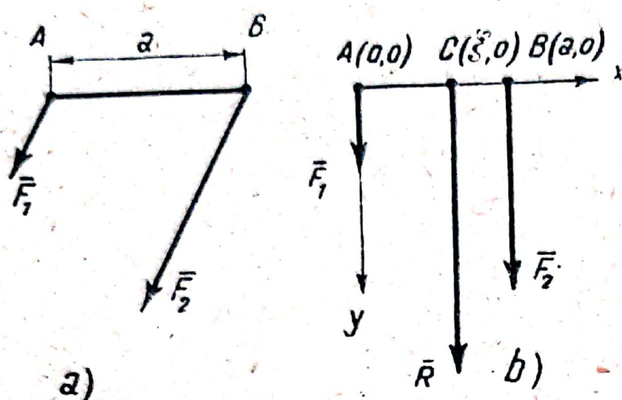


Fig. 2.50.

Avem:

$$\Sigma F_{ix}=0$$

$$\Sigma F_{iy}=F_1+F_2,$$

deci:

$$R=F_1+F_2.$$

Coordonata ξ a punctului de aplicaţie al rezultantei se află cu formula (2.25):

$$\xi=\frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}=\frac{F_1\cdot 0+F_2\cdot a}{F_1+F_2}=\frac{F_2 a}{F_1+F_2}.$$

Se poate verifica uşor că:

$$\frac{F_1}{BC}=\frac{F_2}{AC}=\frac{F_1+F_2}{AB},$$

adică *punctul C împarte distanţa AB în rapoarte invers proporţionale cu forţele*. Într-adevăr, înlocuind în această formulă:

$$BC=a-\xi=a-\frac{F_2 a}{F_1+F_2}=\frac{aF_1}{F_1+F_2},$$

$$AC=\xi=\frac{F_2 a}{F_1+F_2},$$

$$AB=a$$

se obţine o identitate.

c) Se cere să se reducă sistemul de forţe paralele din figura 2.51. Se dă: $F_1=F_3=F_5=3$ tf, $F_2=F_4=2$ tf, $a=1$ m, $b=2$ m, $c=1{,}5$ m.

Rezolvare

Sistemul de forţe paralele în spaţiu se reduce la o rezultantă. Vom calcula modulul rezultantei şi coordonatele punctului său de aplicaţie (centrul forţelor paralele).

Rezultanta are modulul:

$$R=F_1+F_3+F_5-F_2-F_4= = 5\,\text{tf}$$

şi este îndreptată în jos (spre sensul negativ al axei Oz).

Coordonatele punctului său de aplicaţie sînt date de formulele (2.24) şi (2.25):

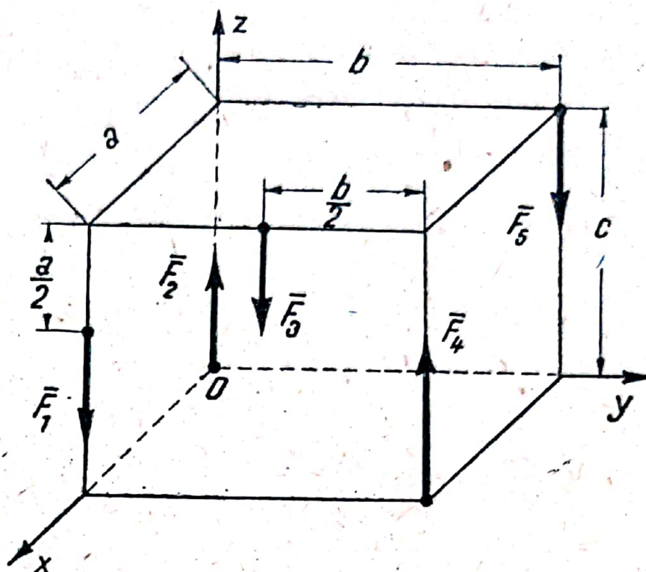


Fig. 2.51.

$$\xi=\frac{-F_1\cdot a+F_2\cdot O-F_3\cdot a+F_4\cdot a-F_5\cdot O}{-F_1+F_2-F_3+F_4-F_5}=\frac{-4\times 1}{-5}=\frac{4}{5}\ \text{m},$$

$$\eta=\frac{-F_1\cdot O+F_2\cdot O-F_3\dfrac{b}{2}+F_4\cdot b-F_5\cdot b}{-F_1+F_2-F_3+F_4-F_5}=$$

$$=\frac{-3\times 1+2\times 2-3\times 2}{-5}=1\ \text{m},$$

$$\zeta=\frac{-F_1\cdot\dfrac{c}{2}+F_2\cdot O-F_3\cdot c+F_4\cdot O-F_5\cdot c}{-F_1+F_2-F_3+F_4-F_5}=$$

$$=\frac{-3\times 0{,}75-3\times 1{,}5-3\times 1{,}5}{-5}=2{,}25\text{m}$$

d) Se cere să se determine centrul de greutate al piesei din figura 2.52.

Rezolvare

Piesa din figura 2.52 poate fi descompusă în trei piese componente avînd forma unor cilindri circulari drepţi, şi anume:

— cilindrul *I* de diametru exterior d_1, diametru interior d_2 şi înălţime a_1;

— cilindrul *II* de diametru exterior D, diametru interior d_2 şi înălţime a_2;

— cilindrul *III* de diametru d_3 şi înălţime a_3.

Piesa admite un plan de simetrie; alegînd sistemul de axe astfel încît acest plan să fie chiar planul xOz vom avea $\eta = 0$.

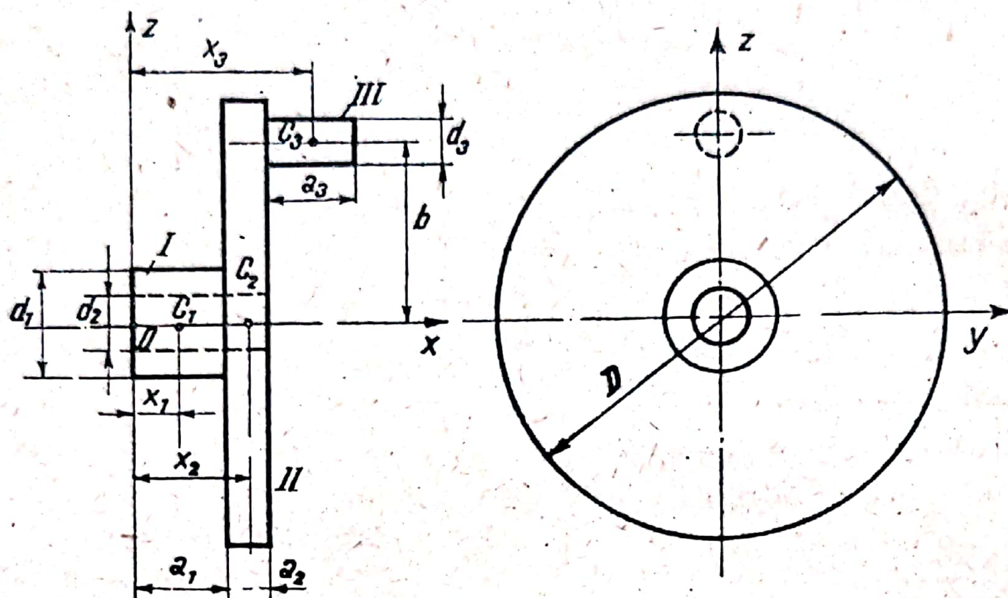


Fig. 2.52.

Centrele de greutate ale celor trei porţiuni componente sînt C_1, C_2, C_3; coordonatele lor (x şi z) sînt arătate pe figura 2.52.

Cu aceasta putem trece la alcătuirea unei tabele din care vor lipsi coloanele y_i şi $V_i y_i$ datorită simetriei în raport cu planul xOz (tabela 2.4).

Prin împărţirea ultimelor coloane la prima obţinem:

$$\xi = \frac{(d_1^2 - d_2^2)\, a_1^2 + (D^2 - d_2^2)\, a_2\, (2a_1 + a_2) + d_3^2 a_3\, (2a_1 + 2a_2 + a_3)}{2\left[(d_1^2 - d_2^2)\, a_1 + (D^2 - d_2^2)\, a_2 + d_3^2\, a_3\right]},$$

$$\zeta = \frac{d_3^2\, a_3\, b}{(d_1^2 - d_2^2)\, a_1 + (D^2 - d_2^2)\, a_2 + d_3^2\, a_3}.$$

Pentru valorile numerice în milimetri

$d_1 = 60$, $d_2 = d_3 = 30$, $D = 250$, $a_1 = a_3 = 50$, $a_2 = 25$, $b = 100$

se obţine:

$$\xi = 60{,}5 \text{ mm}, \quad \zeta = 2{,}6 \text{ mm}.$$

Tabela 2.4

Poziția centrului de greutate al corpului de la aplicația *d*

Nr.	V_i	x_i	z_i	$V_i x_i$	$V_i z_i$
I	$\frac{\pi(d_1^2 - d_2^2)\,a_1}{4}$	$\frac{a_1}{2}$	0	$\frac{\pi(d_1^2 - d_2^2)\,a_1^2}{8}$	0
II	$\frac{\pi(D^2 - d_2^2)\,a_2}{4}$	$a_1 + \frac{a_2}{2}$	0	$\frac{\pi(D^2 - d_2^2)\,a_2\,(2a_1 + a_2)}{8}$	0
III	$\frac{\pi d_3^2\,a_3}{4}$	$a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2}$	b	$\frac{\pi d_3^2\,a_3\,(2a_1 + 2a_2 + a_3)}{8}$	$\frac{\pi d_3^2 a_3 b}{4}$
	$\frac{\pi(d_1^2 - d_2^2)\,a_1}{4} + \frac{\pi(D^2 - d_2^2)a_2}{4} + \frac{\pi d_3^2\,a_3}{4}$			$\frac{\pi(d_1^2 - d_2^2)\,a_1^2}{8} + \frac{\pi(D^2 - d_2^2)a_2\,(2a_1 + a_2)}{8} + \frac{\pi d_3^2\,a_3\,(2a_1 + 2a_2 + a_3)}{8}$	$\frac{\pi d_3^2 a_3 b}{4}$

Capitolul III

A DOUA PROBLEMĂ A STATICII: STUDIUL ECHILIBRULUI SISTEMELOR MATERIALE

1. Generalități

A doua problemă fundamentală a staticii, care va fi examinată în cele ce urmează, este aceea a studiului echilibrului unui sistem material sub acțiunea forțelor exercitate asupra lui de către corpurile înconjurătoare.[1] Acest studiu prezintă în mare

[1] Se obișnuiește să se spună că „un corp se află în echilibru" deși corect ar trebui spus că „sistemul forțelor care acționează corpul respectiv se află în echilibru".

două aspecte; primul dintre ele este legat de *determinarea poziției* în care un anumit corp rămîne în echilibru sub acțiunea exercitată asupra lui de către corpurile înconjurătoare, iar cel de-al doilea se ocupă de *determinarea valorilor forțelor* cu care corpurile acționează unele asupra celorlalte.

Metoda generală analitică de rezolvare a acestor probleme o constituie *metoda ecuațiilor de echilibru*, care se aplică oricărui sistem material, indiferent de natura sa (punct material, solid, rigid, sistem de solide rigide) sau de natura sistemului de forțe care este aplicat corpului (forțe coliniare, concurente, paralele, coplanare sau în spațiu).

2. Legăturile sistemelor materiale

a) **Corpuri libere și corpuri supuse la legături:** *axioma legăturilor*. Să examinăm mișcarea unei pietre azvîrlite în aer; ea poate ocupa orice poziție din spațiu, fără a fi împiedicată de ceva să facă acest lucru. Pentru o mărgea găurită care alunecă pe sîrmă nu este însă aceeași situație; într-adevăr, în acest caz mărgeaua nu poate ocupa orice poziție în spațiu, ci numai pozițiile permise de sîrma pe care ea alunecă.

Aceste două situații sînt caracteristice pentru toate corpurile întîlnite în mecanică; în cele ce urmează le vom distinge prin aceea că vom denumi *corpuri libere* acele corpuri care nu suferă nici o îngrădire de natură geometrică în ceea ce privește pozițiile pe care le pot ocupa în spațiu și *corpuri supuse la legături* acele corpuri care sînt obligate să rămînă în anumite regiuni ale spațiului datorită faptului că trebuie să păstreze un contact permanent cu alte corpuri.

Să analizăm mai îndeaproape de ce natură sînt consecințele pe care le are existența unei legături la un corp rigid.

Mai întîi, existența unei legături are o consecință de natură *geometrică*, ce constă în aceea că posibilitățile de mișcare ale unui corp supus la legături sînt mai mici decît cele ale aceluiași corp liber. Aceasta se manifestă prin aceea că numărul gradelor de libertate ale unui corp supus la legături este mai mic decît numărul gradelor de libertate ale aceluiași corp considerat liber; acest fapt a mai fost pus în evidență și în capitolul I.

A doua consecință este de natură *fizică*; existența unei legături, a unui contact între două corpuri, face ca atît din

partea corpului considerat către corpul cu care este legat, cît şi din partea celui de-al doilea corp către primul, să se exercite forţe şi cupluri, denumite *forţe şi cupluri de legătură* sau *reacţiuni* ale legăturii. Existenţa acestor forţe şi cupluri poate fi pusă uşor în evidenţă prin următorul exemplu : să considerăm un corp aşezat pe o masă orizontală. Corpul este acţionat numai de greutatea sa, dirijată vertical în jos. Datorită acţiunii acestei forţe, corpul ar trebui să se pună în mişcare, fapt care ştim cu toţii că nu se întîmplă. Starea de repaus a corpului este datorită faptului că din partea mesei se exercită asupra corpului o forţă egală şi direct opusă greutăţii lui, care echilibrează deci greutatea, menţinîndu-l în repaus. Acţiunea corpului asupra mesei este egală cu reacţiunea exercitată de masă asupra corpului.

Generalizarea acestei observaţii, precum şi a altora asemănătoare deduse din experienţă este cunoscută în mecanică sub denumirea de *axioma legăturilor*; ea se enunţă astfel : *orice legătură poate fi înlocuită printr-o forţă sau un cuplu*, denumite reacţiunile legăturii. Între reacţiunile legăturilor ca vectori şi mişcările împiedicate de legătura respectivă există următoarea relaţie : orientarea reacţiunilor (direcţia şi uneori şi sensul) este determinată de direcţia şi sensul mişcării interzise de legătura respectivă, şi anume : ele au aceeaşi direcţie şi sensuri inverse celor ale mişcărilor interzise, iar mărimea este determinată de restul forţelor exterioare aplicate corpului. Astfel, în exemplul corpului rezemat pe masă reacţiunea este perpendiculară pe masă (direcţia) şi îndreptată vertical în sus (sensul), deoarece legătura corp-masă interzice mişcarea pe verticală în jos a corpului, neputînd însă interzice mişcarea pe verticală în sus (fig. 3.1, *a*). În schimb, în cazul unei mărgele înşirate pe o sîrmă, reacţiunea are numai direcţia determinată, şi anume aceea a normalei pe sîrmă în punctul de rezemare, deoarece legătura mărgea-sîrmă permite orice mişcare în afară de acelea pe direcţia normală ei. Cum într-un punct la o curbă se pot duce în general o infinitate de normale, rezultă că reacţiunea poate fi dirijată pe oricare dintre aceste normale (fig. 3.1, *b*). Dacă bila ar fi jumătate tăiată ca în figura 3.1, *c*, reacţiunea normală ar putea avea oricare din poziţiile desenate plin şi nu ar putea avea nici una dintre poziţiile desenate punctat. Această ultimă legătură cît şi legătura corp-masă examinată mai sus, care împiedică deplasarea corpului respectiv numai într-un anumit sens pe direcţia normalei în punctul de contact (cazul legăturii corp-masă) sau a normalelor în punctul de

contact (cazul sîrmă-bilă secționată), se numesc *legături unilaterale*, spre deosebire de legăturile de tipul bilă-sîrmă care se numesc *legături bilaterale*.

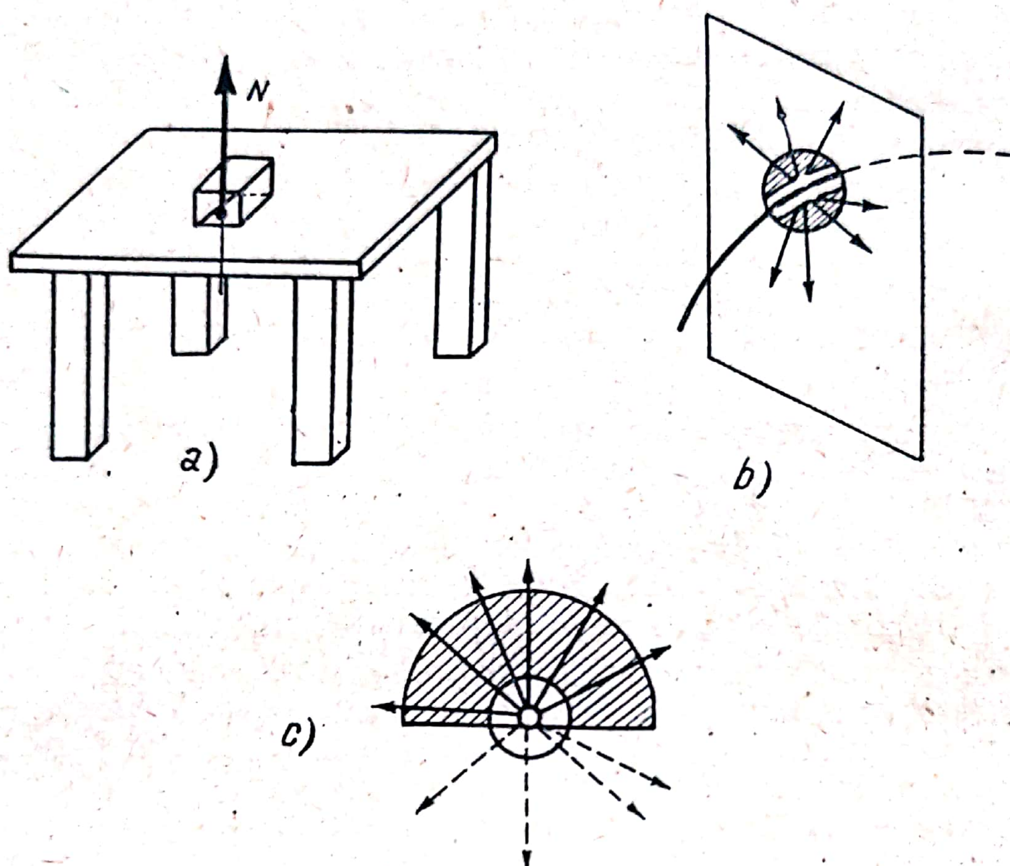


Fig. 3.1.

b) **Legăturile punctului material.** Modurile în care un punct material poate fi legat de corpurile înconjurătoare sînt :

— rezemarea pe o suprafață ;
— rezemarea pe o curbă ;
— prinderea cu fire sau bare.

Primele două moduri au fost examinate la punctul precedent : în ambele cazuri, reacțiunea legăturii este situată pe normală (în primul caz normala la suprafața de rezemare, iar în cel de-al doilea, normala la curba de rezemare). Trebuie remarcat faptul că deoarece la o suprafață într-un punct se poate duce în general o singură normală, legătura prin rezemare pe o suprafață introduce o singură necunoscută, modulul N al reacțiunii. În ceea ce privește legătura prin rezemare pe o curbă, datorită faptului că în general la o curbă într-un punct

se pot duce o infinitate de normale, toate situate în planul normal la curbă în punctul respectiv, reacţiunea introduce două necunoscute: modulul său N şi orientarea dată prin unghiul α al direcţiei sale cu o direcţie fixă Δ_1. Aceste două necunoscute

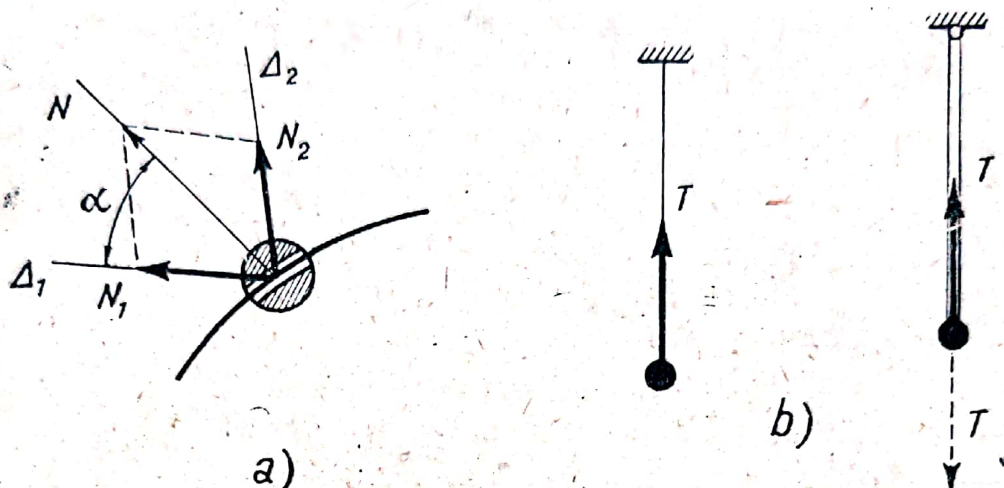


Fig. 3.2.

pot fi înlocuite cu altele două, şi anume cu două componente N_1 şi N_2 ale reacţiunii după două direcţii cunoscute Δ_1 şi Δ_2. O dată aflate modulele acestor componente reacţiunea totală se află cu ajutorul regulii paralelogramului (fig. 3.2, *a*).

La un punct material prins cu un fir de un perete fix, este interzisă o singură mişcare, şi anume aceea în lungul firului în sensul lungirii sale, dar nu şi în sens contrar. Rezultă că reacţiunea T a firului este îndreptată de-a lungul firului, totdeauna în sensul plecînd de la punct, pe fir, spre punctul de suspensie (fig. 3.2, *b*).

Din aceleaşi motive, la un punct material prins cu o bară rigidă de un perete fix, reacţiunea T este dirijată de-a lungul barei, însă spre deosebire de fir ea poate avea ambele sensuri pe această direcţie. Aceasta se datoreşte faptului că bara este rigidă atît atunci cînd este întinsă cît şi atunci cînd este comprimată, pe cînd firul este rigid numai atunci cînd este întins. Putem spune deci că legătura cu fire este o legătură unilaterală; legătura cu bare este o legătură bilaterală.

Ca observaţie generală, constatăm că *toate legăturile punctului îi transmit acestuia o singură forţă concentrată* (reacţiunea legăturii).

c) **Legăturile solidului rigid.** Modurile în care un corp solid rigid poate fi legat de corpurile înconjurătoare sînt mult

mai complexe decît în cazul punctului material. Datorită faptului că solidul rigid are o întindere în una, două sau trei dimensiuni, legătura îi poate transmite nu numai o singură forță concentrată, ca în cazul punctului, ci și forțe distribuite, sau chiar cupluri. În cele ce urmează vom examina numai cîteva dintre legăturile solidului rigid, și anume numai pe acelea la care forța transmisă de legătură este o forță concentrată la fel ca în cazul punctului, sau un cuplu concentrat. În practică, riguros vorbind, asemenea legături nu se întîlnesc; ele constituie deci numai niște aproximații ale legăturilor reale, menite să ușureze calculele privind echilibrul solidului rigid, cu o eroare mulțumitoare pentru nevoile tehnice.

Mai întii vom întîlni aceleași legături ca și în cazul punctului, și anume:

— rezemarea într-un punct pe o suprafață;

— rezemarea într-un punct pe o curbă;

— prinderea cu fire sau bare.

Reacțiunile legăturilor în aceste cazuri sînt aceleași ca în cazul punctului, așa încît nu le vom mai examina.

Cea de-a doua categorie de legături este constituită de legături specifice solidului rigid; una dintre aceste legături este denumită *articulație*. Articulația este în general o legătură care permite corpului legat să se rotească în jurul său, fără a-i da însă și posibilitatea de translație. Articulația poate fi de două feluri, după forma părții corpului care este legată, și anume: articulație cilindrică (fig. 3.3, *a*), dacă o parte cilindrică mobilă a corpului se îmbină cu o parte cilindrică fixă a legăturii, său articulație sferică (fig. 3.3, *b*), dacă forma părții care se îmbină este sferică.

Ca exemple de articulații cilindrice putem cita legătura dintre bolț și bielă la un motor sau balamalele tuturor ușilor; ca exemple de articulație sferică putem cita suspensia unui aparat de fotografiat sau suspensia pîrghiei schimbătorului de viteze de la un automobil (fig. 3.3, *c*).

Contactul dintre corp și legătură se realizează în cazul articulației cilindrice pe suprafața unui cilindru, dacă articulația este strînsă, sau pe o generatoare a sa, dacă articulația are joc; în cazul articulației sferice, contactul între corp și legătură se realizează pe o suprafață sferică.

Să considerăm cazul articulației cilindrice plane, la care contactul se efectuează între două cercuri care se ating într-un punct oarecare de pe periferia lor (fig. 3.4, *a*). Cum contactul se efectuează într-un singur punct, putem considera că avem

un reazem şi deci reacţiunea $\overline{R}$ este dirijată pe normala Δ comună celor două cercuri în punctul de contact. Noi nu cunoaştem însă poziţia punctului de contact, căci ea este funcţie

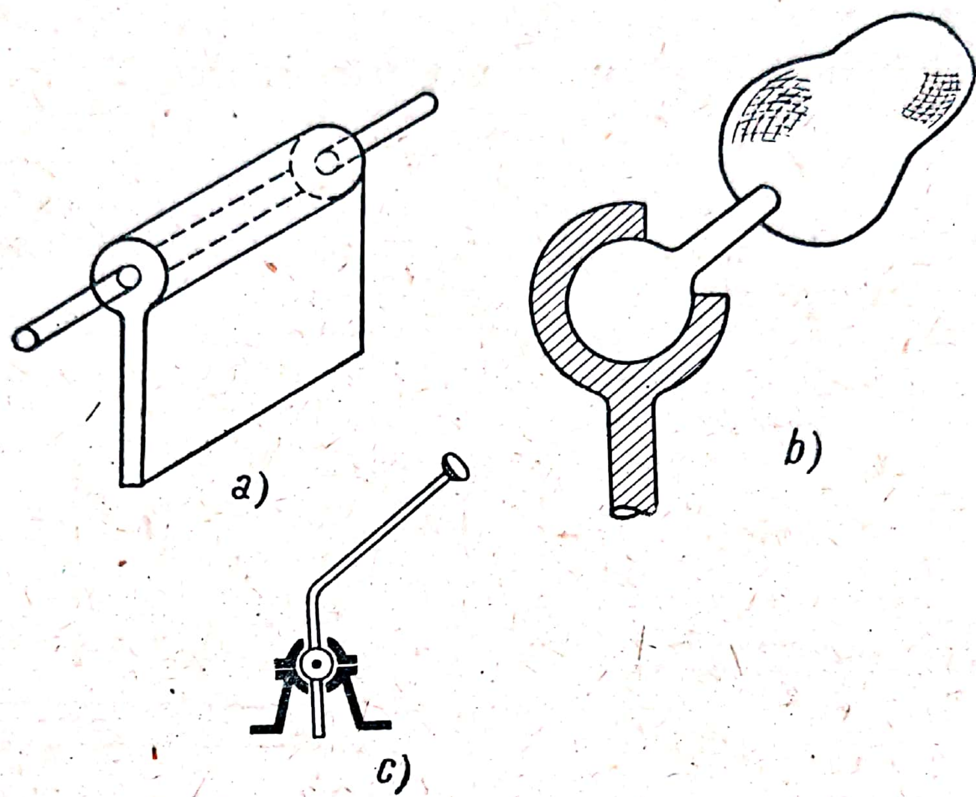


Fig. 3.3.

de forţele aplicate solidului; de aceea, putem spune că *articulaţia cilindrică plană se comportă ca rezemarea unui punct pe o curbă*; ea introduce două necunoscute: modulul reacţiunii $\overline{R}$

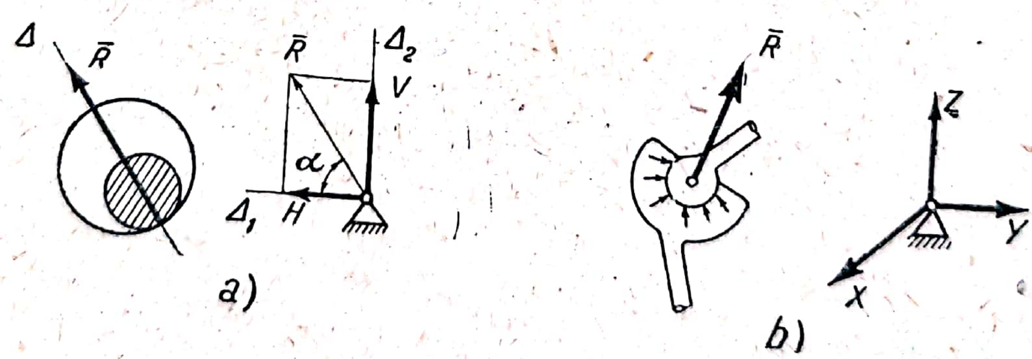


Fig. 3.4.

şi unghiul său α cu o direcţie fixă Δ_1, sau două componente ale sale $\overline{H}$ şi $\overline{V}$, pe două direcţii cunoscute Δ_1, Δ_2.

În cazul articulației sfereice, rezemarea se face într-o infinitate de puncte; în fiecare dintre aceste puncte legătura transmite cîte o forță normală. Sistemul forțelor de legătură este deci un sistem de forțe concurente în centrul articulației sferice; un asemenea sistem se reduce la o singură rezultantă $\overline{R}$. Deoarece nu este cunoscut nici modulul nici direcția acestei rezultante, putem spune că articulația sferică introduce trei necunoscute: componentele $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ ale rezultantei reacțiunilor din punctul de contact pe trei direcții fixe din spațiu (fig. 3.4, *b*).

O altă legătură a solidului rigid este *încastrarea*. Ea este o legătură care suprimă corpului legat orice posibilitate de mișcare, imobilizîndu-l într-o anumită poziție. Ca exemple de în-

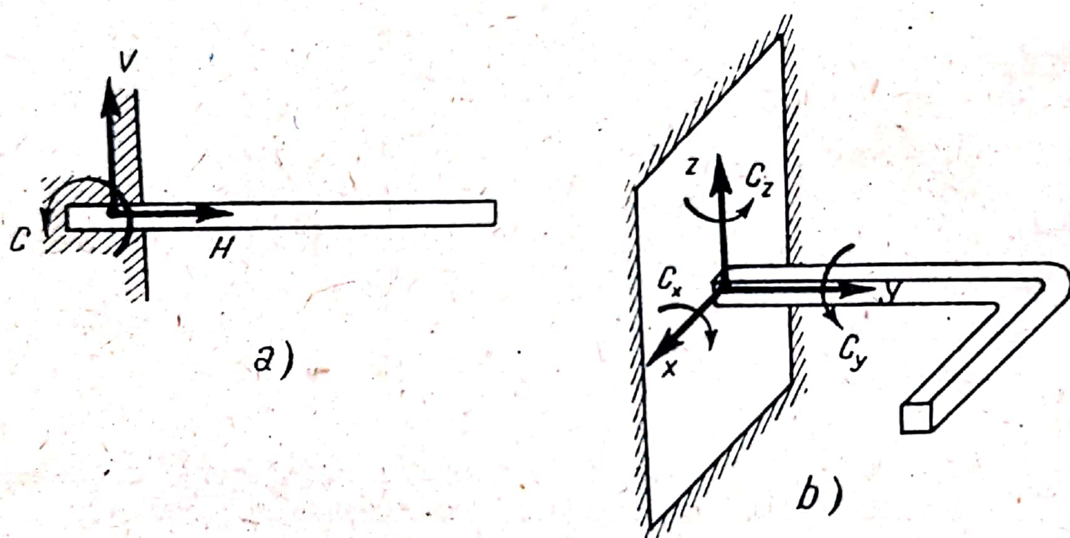


Fig. 3.5.

castrări putem cita încastrarea balcoanelor în ziduri, a stîlpilor în fundații etc. O încastrare plană introduce trei necunoscute: cele două componente H și V ale reacțiunii pe două direcții fixe și momentul C al cuplului care împiedică rotația (fig. 3.5, *a*); o încastrare în spațiu va introduce șase necunoscute: cele trei componente X, Y, Z ale reacțiunii pe trei direcții fixe și cele trei valori C_x, C_y, C_z ale momentelor cuplurilor pe trei axe fixe (fig. 3.5, *b*).

Acestea sînt cele mai importante legături ale solidului rigid cu ajutorul cărora putem aproxima legăturile întîlnite în mod practic în tehnică.

3. Mărimile care intervin în studiul echilibrului unui sistem material

După cum am arătat, statica se ocupă cu studiul echilibrului corpurilor. Mărimile care intervin într-o problemă de statică sînt :

— *mărimi care caracterizează vectorii forță aplicați sistemului material respectiv;* acestea sînt : module ale forțelor, unghiuri ale suporturilor forțelor, distanțe și unghiuri care caracterizează pozițiile punctelor lor de aplicație. Aceste mărimi sînt cunoscute pentru forțele date și parțial necunoscute pentru reacțiuni. Astfel, pentru reacțiunea dintr-un reazem modulul este necunoscut, iar direcția este determinată de normala în punctul de rezemare ;

— *mărimi geometrice și mecanice care caracterizează sistemul material ;* acestea sînt : distanțe sau unghiuri care caracterizează forma geometrică a corpului considerat, masa corpului, poziția centrului său de greutate ;

— *mărimi care caracterizează poziția sistemului material;* acestea sînt : distanțe sau unghiuri formînd mărimile geometrice care caracterizează poziția sistemului material considerat, și despre care s-a vorbit în capitolul I.

Într-o problemă de statică, aceste mărimi se împart în două mari categorii : *date* și *necunoscute.* Orice problemă se consideră rezolvată cînd toate necunoscutele sînt exprimate numai în funcție de datele problemei respective. În principiu, oricare dintre aceste mărimi poate juca într-o problemă de statică atît rolul de dată cît și rolul de necunoscută ; totuși, în problemele practice curente, există o anumită împărțire a acestor mărimi între date și necunoscute, care se păstrează în general aceeași, cu unele mici excepții.

Trebuie remarcat că există anumite probleme de statică în care nu se cer valorile tuturor necunoscutelor din problema respectivă ; astfel, există probleme de statică în care se cere numai poziția de echilibru a sistemului material considerat, fără a se cere și valorile reacțiunilor. În asemenea cazuri, va trebui să alegem dintre ecuațiile de echilibru numai pe acelea care conduc mai repede la rezultat, fără a complica în mod inutil problema respectivă.

În general, din punctul de vedere al datelor şi al necunoscutelor, o problemă de statică se prezintă sub următorul aspect :

Date :

— mărimi ce caracterizează forţele date, aplicate sistemului material : module ale forţelor, distanţe, unghiuri ;

— mărimi geometrice şi mecanice care caracterizează sistemul material : distanţe, unghiuri, mase.

Necunoscute :

— mărimi ce caracterizează poziţia sistemului material (distanţe sau unghiuri) ;

— mărimi ce caracterizează forţele necunoscute aplicate sistemului material (distanţe, unghiuri, module) ; aci intră în general reacţiunile în cazul sistemelor cu legături.

Tabela 3.

Date şi necunoscute în problemele de echilibru

Date	Forte	
	Mărimi geometrice şi mecanice	
Necunoscute	Poziţia de echilibru	
	Reacţiunile	

Mărimile care intervin în studiul echilibrului unui sistem material pot fi prezentate într-o tabelă de forma tabelei 3.1.

4. Metoda analitică pentru studiul echilibrului sistemelor materiale

a) **Ecuaţiile efective de echilibru.** Echilibrul unui sistem material (punct material, corp solid rigid, sistem de solide rigide) este realizat atunci cînd toţi vectorii forţă şi vectorii cuplu care acţionează asupra sistemului considerat îşi fac echilibru. Acest fapt se întîmplă atunci cînd toate cele şase componente (trei ale forţei rezultante şi trei ale momentului rezultant) sînt nule, oricare ar fi punctul din spaţiul faţă de care am face reducerea. Vor trebui deci îndeplinite următoarele condiţii :

$$\Sigma F_{ix}=0\,; \qquad \Sigma M_{ix}=0\,;$$
$$\Sigma F_{iy}=0\,; \qquad \Sigma M_{iy}=0\,; \qquad (3.1)$$
$$\Sigma F_{iz}=0\,; \qquad \Sigma M_{iz}=0.$$

Acestea sînt cele mai generale ecuaţii de echilibru aplicabile atunci cînd asupra corpului acţionează un sistem de forţe şi cupluri situate oricum în spaţiu.

După cîte ne este cunoscut însă din practică, situaţii în care corpurile sînt acţionate de forţe şi cupluri în spaţiu sînt mai rare; de cele mai multe ori sistemele de forţe care acţionează corpurile sînt sisteme particulare, de felul celor analizate la capitolul II (forţe concurente, paralele etc.). Ecuaţiile (3.1) sînt aplicabile şi în aceste cazuri, numai că o parte dintre ele se transformă în identităţi. Într-adevăr, să presupunem că un corp este acţionat de un sistem de forţe concurente şi coplanare, situate în planul xOy; în acest caz, ecuaţia $\Sigma F_{iz} = 0$ este o identitate, deoarece nici una dintre forţe nu dă proiecţie pe axa Oz şi deci această ecuaţie este satisfăcută de la sine prin însăşi natura sistemului de forţe. De aceea, scrierea acestei ecuaţii nu ajută la rezolvarea problemei. Ecuaţiile care nu se transformă în identităţi le vom denumi *ecuaţii efective*; pentru cazurile curente de sisteme particulare de forţe analizate la capitolul II, numărul ecuaţiilor efective este trecut în tabela 3.2, comparativ cu numărul componentelor elementelor de reducere.

Tabela 3.2

Componentele elementelor de reducere şi ecuaţiile de echilibru efective pentru diferite sisteme particulare de forţe

Nr.	Sistemul de forţe şi sistemul de axe $Oxyz$	Figura	Componentele nenule ale elementelor de reducere în O	Ecuaţiile efective de echilibru
1	Forţe coliniare pe axa Ox		$R_x = \Sigma F_{ix}$	$\Sigma F_{ix} = 0$
2	Forţe concurente şi coplanare în punctul O, planul xOy		$R_x = \Sigma F_{ix}$ $R_y = \Sigma F_{iy}$	$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$
3	Forţe concurente în spaţiu, în punctul O		$R_x = \Sigma F_{ix}$ $R_y = \Sigma F_{iy}$ $R_z = \Sigma F_{iz}$	$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma F_{iz} = 0$

Tabela 3.2 (continuare)

Nr.	Sistemul de forțe și sistemul de axe $Oxyz$	Figura	Componentele nenule ale elementelor de reducere în O	Ecuațiile efective de echilibru
4	Forțe paralele cu axa Oy, coplanare în planul xOy		$R_y = \Sigma F_{iy}$ $M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma M_{iz} = 0$
5	Forțe coplanare oarecare în planul xOy		$R_x = \Sigma F_{ix}$ $R_y = \Sigma F_{iy}$ $M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma M_{iz} = 0$
6	Forțe paralele cu axa Oz în spațiu		$R_z = \Sigma F_{iz}$ $M_x = \Sigma M_{ix}$ $M_y = \Sigma M_{iy}$	$\Sigma F_{iz} = 0$ $\Sigma M_{ix} = 0$ $\Sigma M_{iy} = 0$
7	Cupluri în planul xOy		$M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma M_{iz} = 0$
8	Cupluri în spațiu		$M_x = \Sigma M_{ix}$ $M_y = \Sigma M_{iy}$ $M_z = \Sigma M_{iz}$	$\Sigma M_{ix} = 0$ $\Sigma M_{iy} = 0$ $\Sigma M_{iz} = 0$

Din această tabelă se observă că *ecuațiile efective de echilibru ale unui sistem de forțe se obțin egalînd cu zero componentele nenule ale elementelor de reducere.*

La examinarea ecuațiilor de echilibru pot avea loc trei cazuri :

— numărul ecuațiilor de echilibru poate fi mai mare decît numărul necunoscutelor ; în acest caz, eliminînd din ecuațiile de echilibru necunoscutele, vom obține ecuații care leagă între ele caracteristicile mecanice și geometrice date ale corpului material : echilibrul va fi posibil numai după satisfacerea acestor ecuații. De aceea, aceste ecuații care nu conțin necunoscute se numesc *condiții de echilibru* ;

— numărul ecuațiilor de echilibru este egal cu numărul necunoscutelor, astfel încît din ele se pot determina valorile tuturor necunoscutelor.

Aceste prime două cazuri sînt denumite *cazuri static determinate* ;

— dacă din ecuațiile de echilibru nu se pot determina toate necunoscutele, adică numărul ecuațiilor este mai mic decît numărul necunoscutelor sau este egal cu cel al necunoscutelor dar ecuațiile nu sînt independente între ele, avem un *caz static nedeterminat*. În cazurile static nedeterminate nu sînt suficiente ecuațiile de echilibru ale staticii ; pentru determinarea tuturor necunoscutelor sîntem nevoiți să recurgem la studiul proprietăților elastice ale corpurilor ; de aceea, studiul cazurilor static nedeterminate este expus în rezistența materialelor.

b) **Indicații metodice privind rezolvarea problemelor de echilibru al sistemelor materiale cu ajutorul metodei analitice.** Din cele de mai sus rezultă că orice problemă de echilibru se reduce la scrierea și rezolvarea ecuațiilor efective de echilibru, în care intră toate forțele ce acționează sistemul material respectiv (forțe date și reacțiuni).

Pentru rezolvarea problemelor de echilibru se procedează în general astfel :

— se precizează parametrii geometri care determină poziția sistemului material considerat (punct material, corp solid rigid, sistem de corpuri solide rigide) ;

— se figurează toate forțele exterioare date ;

— se eliberează sistemul respectiv de legături, dacă acestea există (în cazul punctului sau solidului rigid liber acestea nu există) ;

— se figurează reacţiunile legăturilor; pentru aceasta se încadrează legătura respectivă într-unul dintre cazurile studiate la punctul 2, cazurile *b* sau *c*;

— se alcătuieşte tabela cu datele şi necunoscutele problemei respective;

— se consideră sistemul de forţe format de forţele exterioare şi de reacţiunile legăturilor şi se determină căruia dintre sistemele arătate în tabela 3.2 îi aparţine, după care se iau din această tabelă ecuaţiile de echilibru corespunzătoare;

— se verifică dacă problema este static determinată sau nu; pentru aceasta, trebuie ca numărul necunoscutelor problemei să nu depăşească pe cel al ecuaţiilor; se alege un sistem de axe şi se scriu ecuaţiile de echilibru, care se rezolvă. Se interpretează rezultatele şi se aleg soluţiile care convin problemei respective.

5. Metoda grafică pentru studiul echilibrului sistemelor materiale

Metoda grafică pentru studiul echilibrului are la bază metoda grafică pentru reducerea sistemelor de forţe cu ajutorul celor două poligoane (poligonul forţelor şi poligonul funicular). După cum s-a arătat în cadrul metodei analitice, condiţia de echilibru a unui sistem material este ca elementele de reducere ale sistemului de forţe să fie nule, indiferent de punctul din spaţiu faţă de care am efectua reducerea. Din punct de vedere grafic, aceasta corespunde condiţiei ca cele două poligoane să se închidă de la sine, adică, în poligonul forţelor, vîrful ultimei forţe să coincidă cu originea primei forţe, iar în poligonul funicular, ultima rază polară să se suprapună peste prima. Acestea sînt condiţiile grafice de echilibru. În cazul forţelor coliniare sau concurente în plan sau spaţiu, este suficientă construcţia poligonului forţelor, pe cînd în cazul forţelor coplanare oarecare sau paralele, se construieşte atît poligonul forţelor cît şi poligonul funicular.

În cele ce urmează vom trata cîteva aplicaţii mai importante ale calculului grafic la studiul echilibrului unui corp supus acţiunii unui sistem de forţe coplanare.

a) **Determinarea reacţiunilor unui corp supus legăturilor reazem simplu şi articulaţie.** Să considerăm un corp supus acţiunii unui sistem de forţe coplanare care se reduce la rezul-

tanta $\overline{F}$, pentru care se cer reacţiunile din articulaţia a şi reazemul b. Direcţia Δ_1 a reacţiunii din reazemul b este cunoscută (fig. 3.6).

Corpul fiind supus acţiunii a trei forţe, acestea trebuie să fie concurente, căci altfel echilibrul nu este posibil. Într-adevăr, dacă compunem două dintre aceste forţe obţinem o rezultantă care, pentru echilibru trebuie să fie egală şi direct opusă celei de-a treia forţe. Procedeul este următorul :

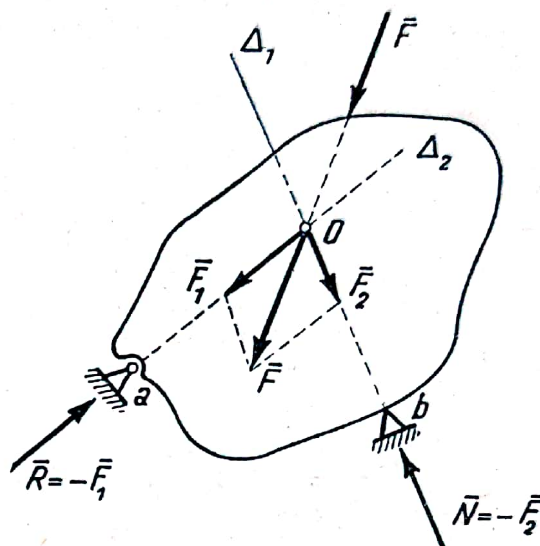


Fig. 3.6.

— se intersectează suportul forţei $\overline{F}$ cu direcţa Δ_1 a reacţiunii reazemului b, în punctul O;

— se uneşte centrul articulaţiei a cu punctul O, obţinîndu-se astfel direcţia Δ_2 a reacţiunii din articulaţia a;

— se alunecă forţa $\overline{F}$ pe suportul său pînă în punctul O şi se descompune după direcţiile Δ_1 şi Δ_2 respectiv în componentele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$; reacţiunile $\overline{R}$ şi $\overline{N}$ din a şi b sînt egale şi direct opuse acestor două componente.

b) **Determinarea reacţiunilor unui corp supus legăturii prin trei reazeme simple, ale căror suporturi nu sînt concurente în acelaşi punct sau paralele.** Să considerăm un corp supus acţiunii unui sistem de forţe coplanare care se reduce la o rezultantă F, pentru care se cer reacţiunile din reazemele A, B, C (fig. 3.7). Metoda grafică are la bază descompunerea unei forţe după trei direcţii coplanare neconcurente sau neparalele. Procedeul este următorul :

— se intersectează forţa $\overline{F}$ cu suportul Δ_1 al uneia dintre reacţiuni în punctul O;

— se uneşte punctul O cu punctul O_1 de intersecţie a celorlalte două direcţii Δ_2 şi Δ_3, obţinîndu-se direcţia ajutătoare Δ;

— se descompune forţa $\overline{F}$ după direcţiile Δ_1 şi Δ obţinîndu-se componentele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_\Delta$; componenta $\overline{F}_\Delta$ se descompune, în continuare, după direcţiile Δ_2 şi Δ_3 în componentele $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$. Cele trei reacţiuni din reazeme, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, sînt egale şi de sensuri contrare cu componentele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$.

c) **Determinarea reacţiunilor unei grinzi drepte pe două reazeme.** Se consideră grinda AB simplu rezemată la extremităţi şi acţionată de un număr oarecare de forţe paralele în figura 3.8 s-au considerat trei forţe paralele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$). Se cere

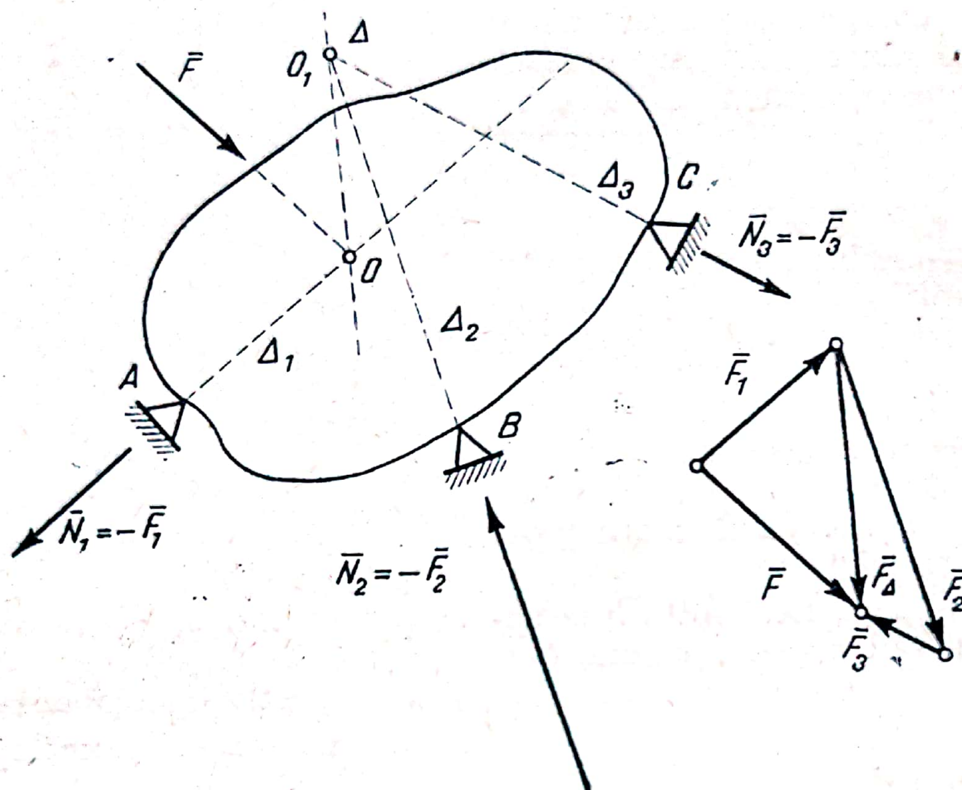


Fig. 3.7.

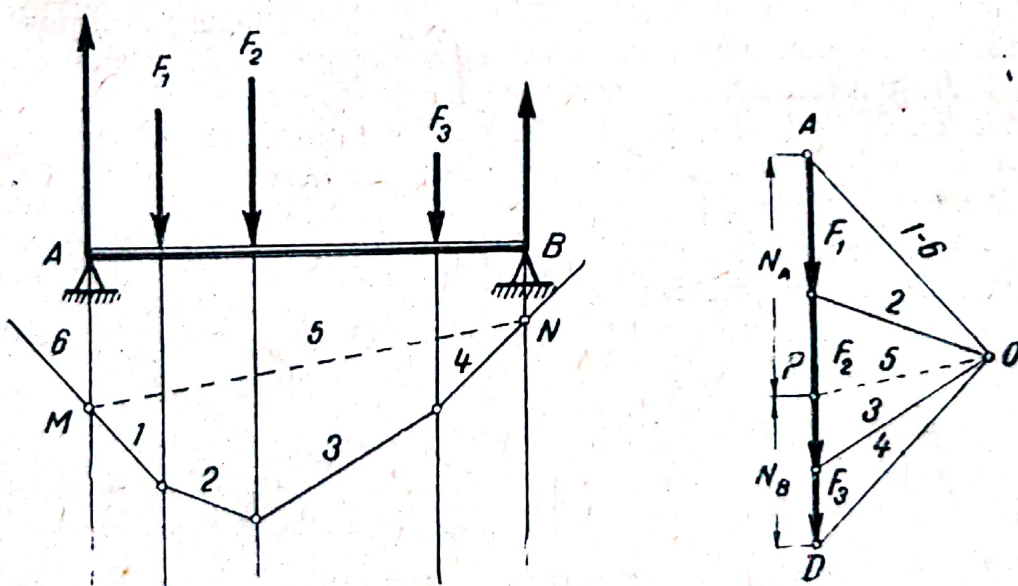


Fig. 3.8.

să se afle, pe cale grafică, reacţiunile $\overline{N}_A$ şi $\overline{N}_B$ din cele două reazeme. Metoda grafică are la bază metoda reducerii sistemelor de forţe coplanare cu ajutorul poligonului forţelor şi al poligonului funicular. Procedeul este următorul:

— se construieşte poligonul forţelor date, care, din cauza paralelismului, are toate laturile în linie dreaptă; dintr-un pol arbitrar O se duc razele polare *1, 2, 3, 4*;

— se construieşte poligonul funicular *1, 2, 3, 4*; laturile acestuia taie suporturile reacţiunilor în M şi N;

— prin punctul O se duce $OP \| MN$; punctul P determină pe AD vectorii $\overline{DP}$ şi $\overline{PA}$, care reprezintă respectiv reacţiunile $\overline{N}_B$ şi $\overline{N}_A$.

Pentru justificarea construcţiei să considerăm sistemul forţelor F_1, F_2, F_3, $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$; poligonul forţelor şi poligonul funicular al acestui sistem se închide de la sine. Într-adevăr, poligonul forţelor este $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{N}_B$ $\overline{N}_A$ iar poligonul funicular are laturile *1, 2, 3, 4*, NM şi iarăşi *6* care se suprapune cu *1*.

6. Aplicarea metodelor analitică şi grafică la studiul echilibrului sistemelor materiale libere şi supuse la legături

a) **Echilibrul punctului material.** Sistemul forţelor care acţionează punctul material, format din forţele exterioare date şi din forţele de legătură, nu poate fi decît un sistem de forţe coliniare, concurente şi coplanare sau concurente în spaţiu. Ecuaţiile de echilibru efective sînt cele din tabela 3.2, corespunzătoare acestor trei cazuri. Condiţiile analitice de echilibru sînt deci în număr de una pentru cazul forţelor coliniare, două pentru cazul cînd forţele care acţionează punctul formează un sistem de forţe concurente şi coplanare, sau în număr de trei în cazul cînd forţele care acţionează punctul formează un sistem de forţe concurente în spaţiu. Cu ajutorul lor se determină poziţia de echilibru a punctului considerat şi valorile reacţiunilor.

Condiţia grafică de echilibru este în ambele cazuri aceeaşi: poligonul forţelor trebuie să se închidă, adică forţele aplicate punctului să aibă rezultanta nulă. În primul caz, poligonul forţelor este situat pe o dreaptă; în cel de-al doilea, poligonul este situat în acelaşi plan, iar în cel de-al treilea caz, el este un poligon în spaţiu.

b) **Echilibrul solidului rigid.** Sistemul forţelor care acţionează un solid rigid, format din forţele exterioare date şi din

forțele de legătură se poate afla în oricare din configurațiile arătate în tabela 3.2. Ecuațiile de echilibru efective diferă de la caz la caz după configurația sistemului de forțe care acționează solidul, așa cum se arată în aceeași tabelă, numărul lor variind între o ecuație, în cazul cînd solidul este acționat de un sistem de forțe coliniare, și șase ecuații, în cazul cînd solidul este acționat de un sistem de forțe oarecare în spațiu.

Cu ajutorul acestor ecuații se determină poziția de echilibru a solidului considerat și valorile reacțiunilor.

c) **Echilibrul sistemelor de solide rigide.** Sistemul forțelor care acționează un sistem de solide rigide și condițiile generale de echilibru ale acestor forțe sînt aceleași ca în cazul unui singur solid rigid.

Pornind de la axioma că *dacă un sistem de corpuri se află în echilibru fiecare corp al sistemului se află de asemenea în echilibru*, pentru studiul echilibrului unui sistem de corpuri solide rigide vom putea folosi una dintre următoarele trei metode:

— metoda echilibrului fiecărui corp în parte;
— metoda echilibrului părților;
— metoda echilibrului întregului sistem.

Pentru aplicarea primei metode, se izolează fiecare corp din sistem introducîndu-se forțele exterioare date și forțele de legătură, care reprezintă acțiunea celorlalte corpuri din sistem asupra corpului considerat (fig. 3.9, *a*); se scriu apoi condițiile de echilibru ale corpului respectiv. Această operație se repetă pentru fiecare dintre corpurile sistemului. Numărul ecuațiilor obținute este egal cu suma numărului de ecuații scrise pentru fiecare corp în parte.

Pentru aplicarea celei de-a doua metode, se împarte sistemul de corpuri în subsisteme compuse dintr-un număr oarecare de corpuri ale sistemului inițial și se introduc forțele exterioare aplicate fiecăruia dintre subsistemele în care s-a împărțit sistemul de corpuri dat inițial, precum și forțele de legătură provenind de la corpurile rămase în afara subsistemului cu al cărui echilibru ne ocupăm (fig. 3.9, *b*). Într-adevăr, după cum am văzut mai sus, forțele și cuplurile exercitate între corpurile sistemului, denumite forțe interioare, sînt două cîte două egale și direct opuse și deci se anulează. Se scriu apoi condițiile de echilibru ale subsistemului respectiv.

Această operație se repetă pentru fiecare dintre subsistemele care alcătuiesc sistemul inițial. Numărul ecuațiilor obținute este egal cu suma numărului de ecuații scrise pentru fiecare subsistem în parte.

La aplicarea celei de-a treia metode, sistemul de corpuri dat se consideră ca un singur corp (fig. 3.9, *c*). Se introduc forțele exterioare date și forțele de legătură cu mediul înconjurător și se scriu condițiile de echilibru ale sistemului respectiv.

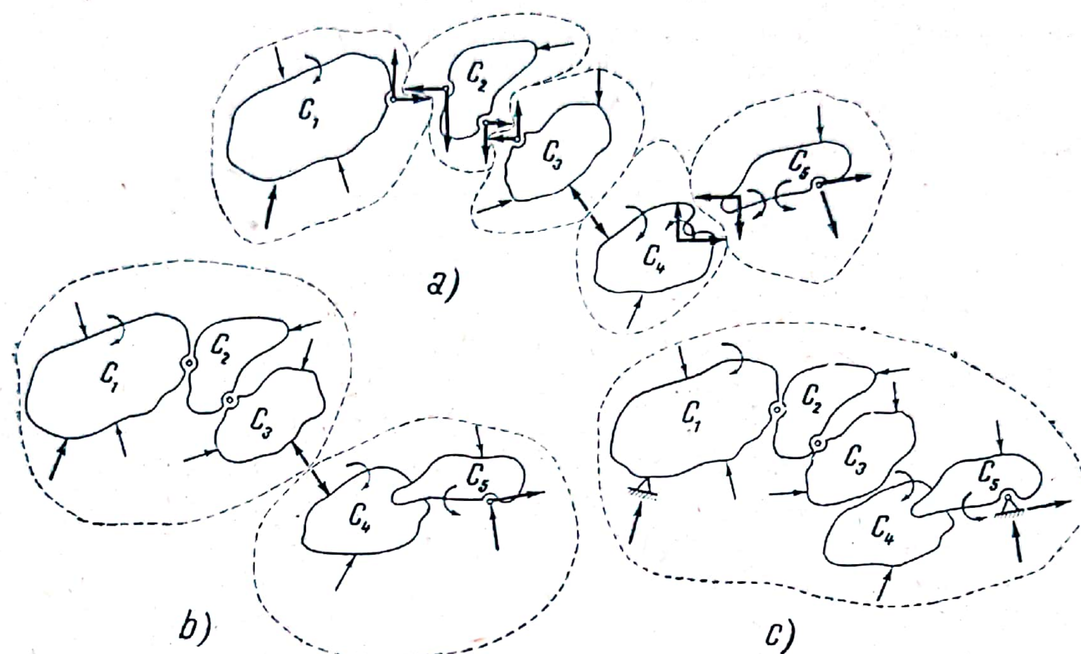


Fig. 3.9.

Trebuie observat că ecuațiile de echilibru scrise la această metodă reprezintă *condiții necesare* de echilibru, dar nu și suficiente. Într-adevăr, dacă vom considera sistemul celor două

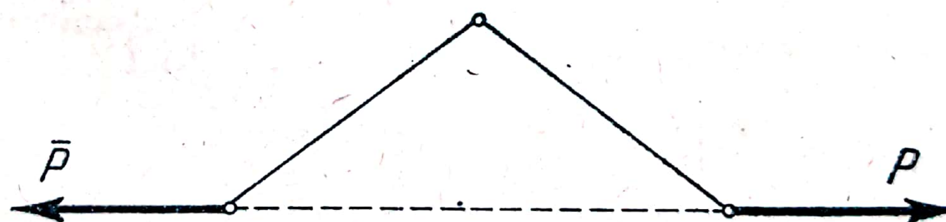


Fig. 3.10.

bare articulate din figura 3.10 acționate de forțele egale și direct opuse de modul P, cu toate că aceste forțe își fac echilibru, sistemul de corpuri se pune în mișcare.

Cu ajutorul ecuațiilor scrise la fiecare dintre cele trei metode arătate, se determină poziția de echilibru a sistemului și valorile reacțiunilor.

Condițiile de echilibru grafic sînt aceleași ca în cazul unui singur solid rigid.

7. Frecări; echilibrul cu frecare

a) **Frecarea de alunecare.** În toate problemele de echilibrul punctului material și solidului rigid în care a intervenit rezemarea unui corp pe altul, am presupus că cele două suprafețe în contact sînt perfect lucioase și că reazemul împiedică deplasarea corpului rezemat numai pe direcția normalei comune la cele două suprafețe în contact în punctul de rezemare. De aci rezultă că corpul rezemat se poate mișca în orice direcție tangentă celor două suprafețe de rezemare în punctul de contact fără să întîmpine vreo opunere într-una din aceste direcții. Din acest motiv, reazemul a fost înlocuit în toate aceste probleme printr-o singură reacțiune normală.

Modul acesta de a privi lucrurile constituie o simplificare în raport cu fenomenul real. Ne este cunoscut din practică faptul că oricît de fin am prelucra o suprafață, ea prezintă totuși o serie de asperități invizibile cu ochiul liber, dar care apar imediat ce privim suprafața respectivă cu un aparat optic. În timpul rezemării, asperitățile reazemului se întrepătrund cu asperitățile corpului care se reazemă, dînd naștere la forțe situate în planul tangent suprafeței de contact, care sînt denumite, din acest motiv, *reacțiuni tangențiale* sau *forțe de frecare*.

Să arătăm existența acestor forțe printr-o experiență simplă. Pe o masă orizontală așezăm un corp C de greutate G (fig. 3.11). El va rămîne în echilibru sub acțiunea forței de gravitație G și a reacțiunii normale N. Să legăm corpul într-un punct foarte apropiat de bază cu un fir, de care să tragem paralel cu masa. Dacă nu ar exista nici o forță care să se opună mișcării copului C în planul mesei, adică dacă legătura de rezemare corp-masă ar fi lucie, atunci imediat ce am trage de sfoară, cu cea mai mică forță, corpul s-ar pune în mișcare. În realitate observăm însă că, deși tragem de fir cu o forță nu prea mare, totuși corpul rămîne în repaus. Acesta înseamnă că între suprafața de contact a corpului cu masa a luat naștere o forță T care se opune acțiunii forței cu care tragem de fir, și anume ea este egală și de sens opus acesteia. Măsurarea forței cu care tragem se poate efectua intercalînd pe firul de care tragem un dinamometru cu arc.

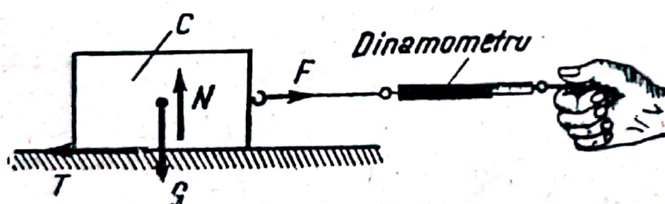


Fig. 3.11.

Să tragem acum cu o forţă mai mare de fir; observăm că corpul rămîne încă în repaus. Aceasta înseamnă că valoarea forţei de frecare s-a schimbat, şi anume ea a crescut, pentru a echilibra noua valoare a forţei cu care tragem.

Dacă mărim din ce în ce forţa din fir, forţa de frecare va creşte şi ea pînă la un anumit moment, cînd corpul se va pune în mişcare. Aceasta înseamnă că forţa de frecare nu poate creşte necontenit; această creştere are o limită care, o dată depăşită, face ca forţa din fir să fie mai mare decît forţa de frecare şi corpul să se pună în mişcare în direcţia firului. De aci tragem concluzia că corpul va rămîne în repaus atîta timp cît forţa de frecare va avea orice valoare între zero şi valoarea sa maximă.

Între aceste două valori corpul rămîne în repaus, frecarea fiiind în acest caz o *frecare statică*. Din momentul în care începe să se mişte, corpul continuă totuşi să întîmpine rezistenţa datorită frecării; această rezistenţă este denumită *frecare dinamică* şi ea este în general mai mică decît frecarea statică.

Expresia forţei de frecare şi legile fenomenului frecării au fost stabilite pe cale experimentală de către fizicianul francez Coulomb (1736—1806) ;ele sînt următoarele:

— Modulul forţei de frecare maxime este proporţional cu modulul reacţiunii normale; coeficientul de proporţionalitate se numeşte coeficient de frecare de alunecare:

$$T_{max} = \mu N. \tag{3.2}$$

Cu aceasta, forţa de frecare este determinată ca vector astfel:

— modulul $T_{max} = \mu N$ pentru forţa de frecare maximă, iar pentru cazul cînd nu se atinge această valoare, modulul său are o valoare nedeterminată între zero şi μN $(0 \leqslant T \leqslant \mu N)$;

— direcţia aceeaşi ca a tendinţei de deplasare a corpului respectiv (situată în planul tangent în punctul de contact al suprafeţelor);

— sensul invers sensului deplasării;

— punctul de aplicaţie în punctul de contact al corpurilor.

Faptul că modulul forţei de frecare este proporţional cu reacţiunea normală se poate verifica uşor, cum se arată în figura 3.12. În primul caz, (fig. 3.12, *a*), reacţiunea normală are valoarea $N = P$ şi forţa necesară punerii corpului în mişcare

este F; în cel de-al doilea caz (fig. 3.12, *b*), reacţiunea normală este $N_1 = 2P$, iar forţa necesară punerii corpului în mişcare este F_1. Se constată experimental că:

$$\frac{F}{N} = \frac{F_1}{N_1},$$

adică:

$$\frac{F}{P} = \frac{F_1}{2P}; \; F_1 = 2F.$$

— Coeficientul de frecare μ nu depinde de forma şi mărimea suprafeţei în contact (adică de presiunea dintre cele două corpuri).

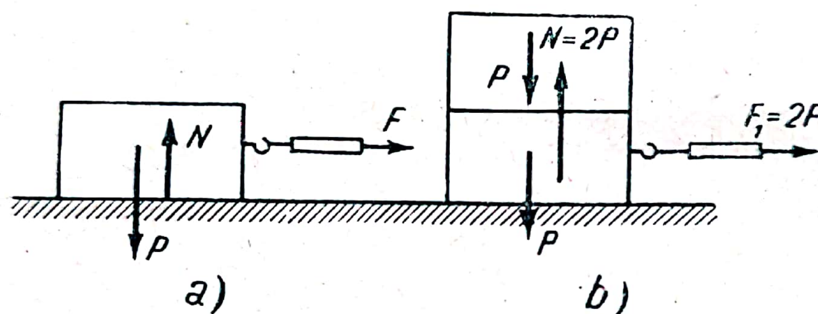


Fig. 3.12.

Această lege poate fi verificată uşor aşezînd acelaşi corp în două poziţii, ca în figura 3.13, pe două suprafeţe de contact diferite pe o aceeaşi masă. În ambele cazuri, forţa care pune în mişcare corpul este aceeaşi.

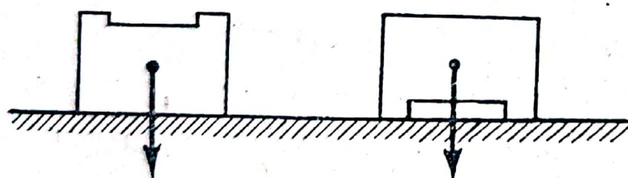


Fig. 3.13.

— Coeficientul de frecare μ depinde de natura materialelor în contact (felul materialului şi gradul său de prelucrare). Şi acestă lege poate fi verificată experimental făcînd încercări cu corpuri de forme şi greutăţi egale. dar construite din materiale diferite, variind eventual şi materialul mesei sau rugozitatea suprafeţelor în contact; se constată cu această ocazie că forţa de frecare T_{max} este variabilă de la un caz la altul, depinzînd de felul materialului şi de calitatea suprafeţelor în contact.

Coeficientul de frecare este un număr fără dimensiuni, iar valoarea sa scade foarte repede dacă între suprafeţele aflate în contact se interpune un strat de lubrifiant. Aceste valori stabilite experimental se găsesc în tabele ; cîteva valori sînt arătate în tabela 3.3.

Tabela 3.3

Valorile coeficientului de frecare μ

Natura corpurilor	Starea suprafeţelor	Coeficientul μ	Observaţii
Oţel pe oţel	unse cu seu	0,07	
	unse cu ulei	0,15	
	uscate	0,22—0,25	coeficient de aderenţă (la pornire)
Bronz pe bronz	puţin unse	0,20	
Bronz pe fontă	puţin unse	0,21	
Fontă pe fontă sau bronz	puţin unse	0,15	
	cu apă	0,31	
Oţel pe gheaţă	—	0,014	
	—	0,027	coeficient de aderenţă
Stejar pe stejar (uscat)	în lungul fibrelor	0,48	
	normal de fibre	0,34	
Curea de piele pe tambur de stejar	uscate	0,27	
	puţin unse	0,47	
Curea de piele pe fontă	puţin unse	0,28	depinde de viteză
	cu apă	0,36	

Datorită existenţei forţei de frecare $\overline{T}$, reacţiunea totală $\overline{R}$ a unui reazem se obţine compunînd după regula paralelogramului forţele $\overline{T}$ şi $\overline{N}$ (fig. 3.14). Din această figură se vede că reacţiunea $\overline{R}$ este înclinată faţă de normala cu un unghi φ dat de relaţia :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T}{N}.$$

Dacă considerăm valoarea maximă a forţei de frecare vom avea :

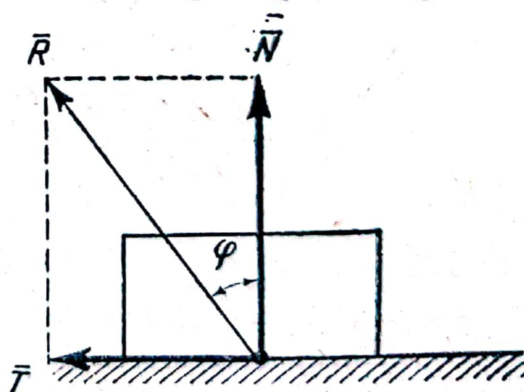


Fig. 3.14.

$$\operatorname{tg} \varphi_{max} = \frac{T_{max}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu. \quad (3.3)$$

Rezultă de aci că unghiul maxim de înclinare al reacţiunii totale $\overline{R}$ faţă de normala comună în punctul de rezemare este acel unghi a cărui tangentă este egală cu coeficientul de frecare; acest unghi este denumit *unghi de frecare.*

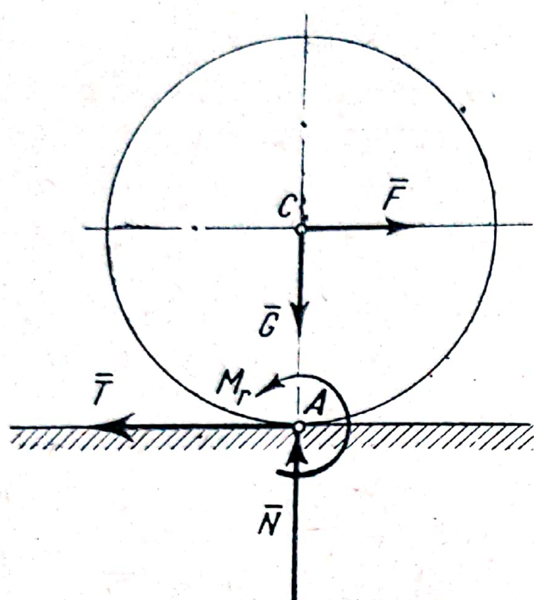


Fig. 3.15.

Situaţia pentru care forţa de frecare îşi atinge valoarea sa maximă sau pentru care reacţiunea totală $\overline{R}$ se înclină cu unghiul maxim este denumită *echilibru la limita de alunecare*, spre deosebire de situaţia pentru care forţa de frecare are o valoare cuprinsă între zero şi valoarea sa maximă, denumită *echilibru sub limita de alunecare.*

b) **Frecarea de rostogolire.** Să examinăm acum mişcarea de rostogolire a unui corp pe altul. Pentru simplificare, vom considera cazul unui cilindru circular drept, care se rostogoleşte pe un plan orizontal (fig. 3.15).

Asupra acestui cilindru acţionează următoarele forţe:

— greutatea $\overline{G}$ a cilindrului, aplicată în punctul C;

— reacţiunea normală $\overline{N}$ aplicată în punctul A de contact al cilindrului cu planul orizontal;

— forţa $\overline{F}$, aplicată în centrul roţii, care tinde să deplaseze roata spre dreapta;

— forţa de frecare $\overline{T}$, îndreptată invers tendinţei de alunecare a cilindrului în punctul A.

Să scriem ecuaţia de momente în raport cu punctul A: obţinem:

$$FR = 0.$$

Cum $R \neq 0$, rezultă că pentru echilibrul cilindrului trebuie ca $F = 0$. Acest rezultat contrazice experienţa, întrucît ne este cunoscut faptul că pentru o forţă $\overline{F}$ diferită de zero, dar nu prea mare, cilindrul rămîne în echilibru. Dacă analizăm mai îndeaproape cărui fapt se datoreşte această neconcordanţă dintre teorie şi practică, vom constata că contactul dintre cele două

corpuri nu se efectuează într-un singur punct, ci pe o suprafață AA' (fig. 3.16, *a*). Atît această suprafață cît și corpul însuși nu sînt două corpuri rigide, ci ele se deformează, astfel încît în timpul rostogolirii punctele *1, 2, 3, 4, 5,* de pe corpul C_1 nu mai vin în contact cu punctele corespunzătoare *1', 2', 3', 4', 5'* de pe planul de rezemare (fig. 3.16, *a*), ci corpul C_2 suferă o întindere, materialul acumulîndu-se în fața cilindrului sub forma unei movile. Reacțiunile exercitate în punctele de contact formează un sistem de forțe paralele, a căror rezultantă nu mai are suportul pe dreapta *n—n*, ci este deplasat față de aceasta cu distanța *s* denumită *coeficient de frecare de rostogolire* (fig. 3.16, *b*). Dacă reducem forța $\overline{N}$ pe direcția *n—n*, va trebui să introducem un cuplu denumit *cuplul frecării de rostogolire*, al cărui moment este (fig. 3.16, *c*):

$$M_r = Ns. \qquad (3.4)$$

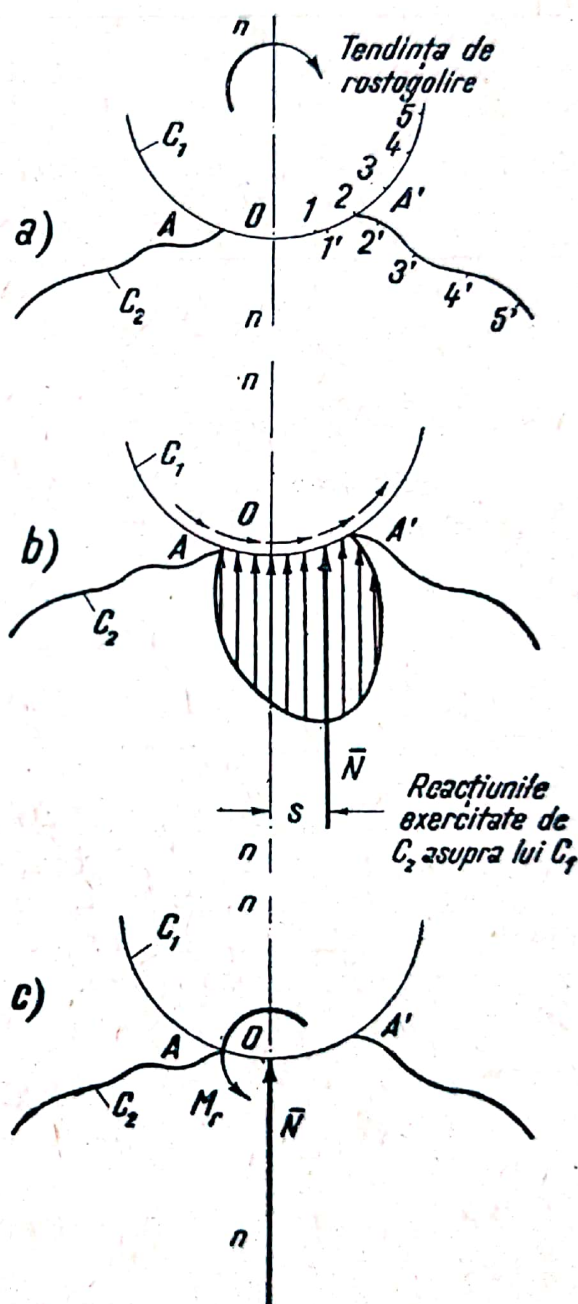


Fig. 3.16.

Ca și în cazul frecării de alunecare, se constată experimental că cilindrul rămîne în echilibru atîta timp cît momentul frecării de rostogolire nu depășește valoarea Ns, adică:

$$0 \leqslant M_r \leqslant Ns.$$

Coeficientul frecării de rostogolire *s* reprezintă o distanță și în consecință se măsoară în unități de lungime (de exemplu în centimetri). Valoarea sa depinde, la fel ca și coeficientul μ, de

Tabela 3.4

Valorile coeficientului de frecare de rostogolire

Natura suprafețelor	s (mm)
Oțel pe oțel	0,05
Fontă pe lemn	0,46
Lemn tare pe lemn	0,5
Roți de vagoane pe șine	0,5 — 1
Roată de cauciuc pe beton	3,15

natura și calitatea suprafețelor în contact și se stabilește pe cale experimentală, pentru diferite perechi de materiale în contact. Cîteva valori ale acestui coeficient sînt redate în tabela 3.4.

Să scriem acum ecuațiile de echilibru ale roții ; avem :

$$\begin{aligned} &(\Sigma F_x = 0) \qquad -T+F=0 \\ &(\Sigma F_y = 0) \qquad N-G=0 \\ &(\Sigma M_A = 0) \qquad FR-M_r=0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Valorile maxime ale forței de frecare de alunecare și ale momentului frecării de rostogolire sînt :

$$T_{max} = \mu N = \mu G,$$
$$M_{max} = sN = sG,$$

deoarece $N = G$, în baza celei de-a doua ecuații a sistemului (3.5).

Să presupunem că, pornind din repaus, aplicăm cilindrului forțe $\overline{F}$ din ce în ce mai mari ; ne întrebăm cum va începe discul să se miște în momentul în care forțele care-i sînt aplicate nu-și mai fac echilibru ; se pot ivi următoarele cazuri :

— pentru ca să nu existe nici alunecare, nici rostogolire, deci pentru ca discul să rămînă în repaus, trebuie ca :

$$T \leqslant T_{max},$$
$$M_r \leqslant M_{max}.$$

În baza primei și ultimei ecuații a sistemului (3.5) rezultă :

$$F \leqslant \mu G,$$
$$F \leqslant \frac{sG}{R},$$

ceea ce revine la a spune că forța F trebuie să fie mai mică decît cea mai mică dintre cantitățile μG și sG/R ;

— pentru ca cilindrul să înceapă să se rostogolească fără să alunece, va trebui ca:

$$F \leqslant \mu G,$$

$$F > \frac{sG}{R}$$

sau

$$\frac{sG}{R} < F \leqslant \mu G;$$

— pentru ca cilindrul să înceapă să alunece fără a se rostogoli, trebuie ca:

$$\mu G < F \leqslant \frac{sG}{R}.$$

Dacă cilindrul din acest exemplu este o roată avînd greutatea $G = 250$ kgf, raza $r = 50$ cm, coeficientul de frecare de alunecare $\mu = 0{,}1$ şi coeficientul de frecare de rostogolire $s = 0{,}8$ cm, obţinem:

$$\mu G = 0{,}1 \times 250 = 25 \text{ kgf},$$

$$\frac{sG}{R} = \frac{0{,}8 \times 250}{50} = 4 \text{ kgf}.$$

Rezultă că mărind din ce în ce forţa $\overline{F}$ roata va începe să se rostogolească fără să alunece pentru valori ale forţei F cuprinse între:

$$4 < F \leqslant 25 \text{ kgf}.$$

O b s e r v a ţ i e. În general, valoarea $\frac{sG}{R}$ este mult mai mică decît valoarea μG, ceea ce justifică înlocuirea frecării de alunecare cu cea de rostogolire. De aceea se folosesc spre exemplu, în locul lagărelor de alunecare, lagăre de rostogolire, la care se introduce între axă şi lagăr un organ denumit *rulment*, prevăzut cu role (cilindrice sau conice) sau cu bile sferice. În acest mod, mişcarea de alunecare a fusului în lagăr este înlocuită cu o mişcare de rostogolire, fapt care reduce foarte mult rezistenţa provenită din frecare (fig. 3.17, *a*, *b* şi *c*).

În acelaşi scop se folosesc şi galeţii conici la plăcile turnante utilizate în transporturi (fig. 3.18, *a*), sau bilele sferice la

ușile sau porțile alunecătoare (fig. 3.18, *b*), sau rulourile în cazul transportoarelor de materiale din uzine (fig. 3.18, *c*).

c) **Frecări în lagăre și articulații.** Aceste frecări iau naștere între axa care se rotește și cuzinetul lagărului. Să analizăm modul în care se produce această frecare.

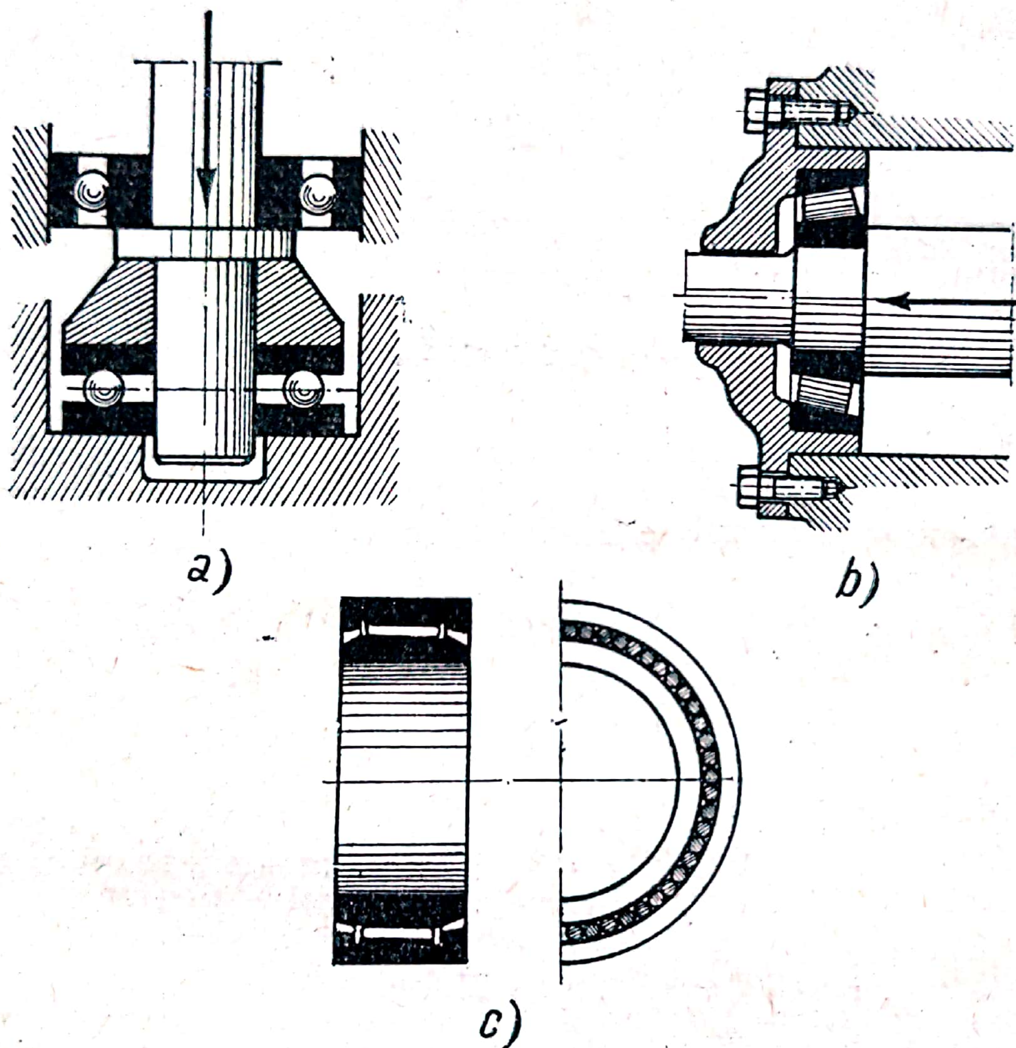


Fig. 3.17.

Figura 3.19, *a* reprezintă un disc de greutate P și rază r aflat în echilibru sub acțiunea acestei greutăți și a reacțiunii normale N din punctul de rezemare C în interiorul unei cavități de formă circulară, avînd un diametru puțin mai mare decît diametrul discului. Acesta este cazul rezemării unui fus pe cuzinetul lagărului.

Să aplicăm discului un cuplu exterior de moment M; el se va urca pe peretele locașului său circular cu distanța CC' (fig. 3.19, *b*). Elementele de reducere a forțelor de frecare sînt : cuplul de moment M_r și forța de frecare T.

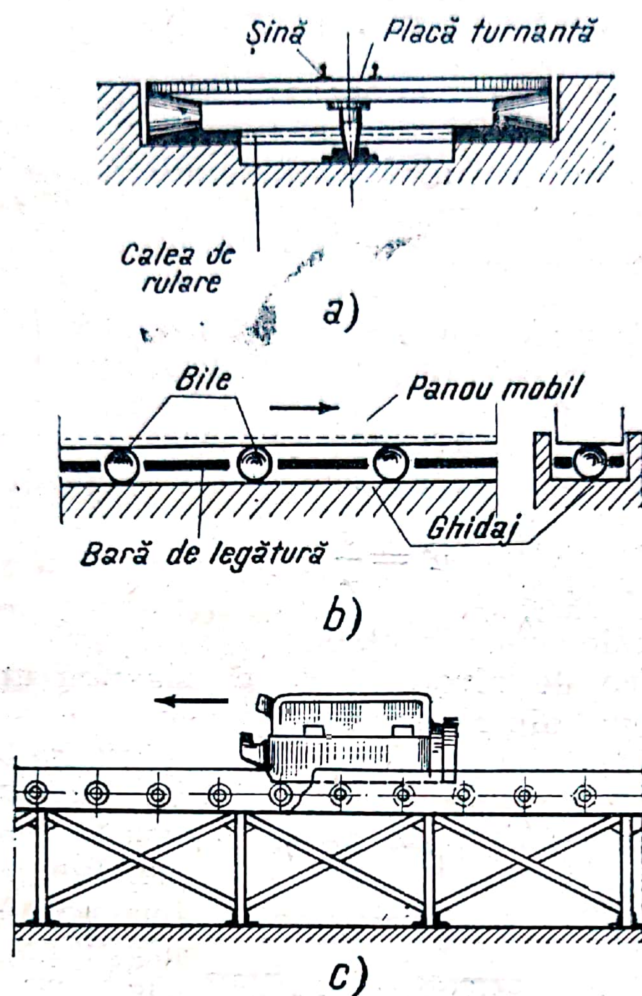


Fig. 3.18.

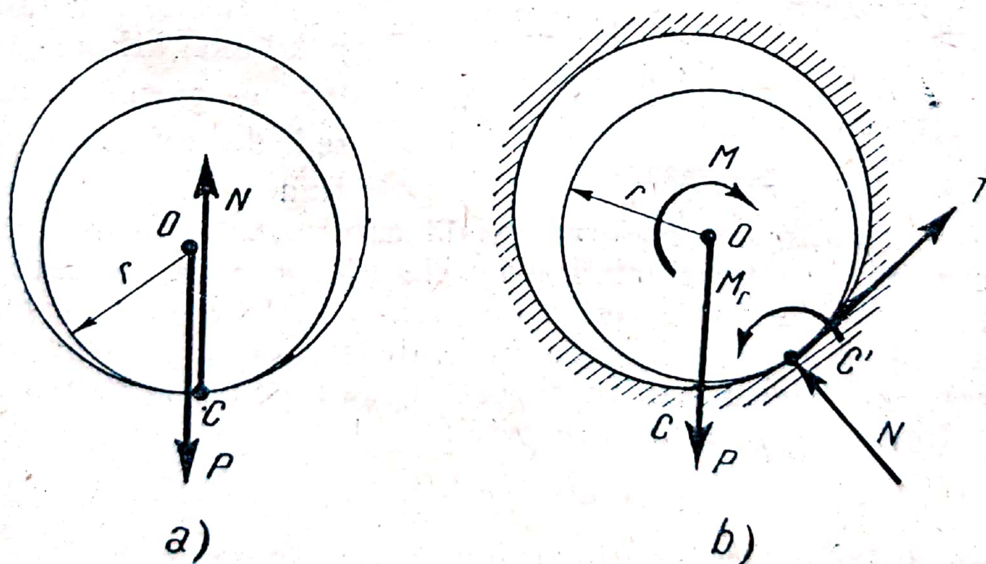


Fig. 3.19.

Să scriem acum ecuația de echilibru a momentelor în raport cu centrul O al discului; avem:

$$(\Sigma M_O=0),\ M-M_r-Tr=0.$$

Ultimii doi termeni ai acestei ecuații reprezintă momentul total al forțelor de frecare; admițînd că ambele frecări au atins valorile maxime avem:

$$M_f=M_r+Tr=sN+\mu Nr=N(s+\mu r)=Nr\left(\frac{s}{r}+\mu\right)=\mu' r N$$

Coeficientul μ' se numește *coeficient de frecare în articulație*. El se deduce fie prin calcul din relația:

$$\mu'=\frac{s}{r}+\mu, \tag{3.6}$$

fie direct pe cale experimentală.

d) **Frecarea de pivotare.** Să considerăm un arbore care reazemă într-una dintre extremitățile sale pe o suprafață, ca în figura 3.20. În tehnică, această legătură poartă denumirea de *pivot*. Rezemarea se poate face pe o suprafață plană (fig. 3.20, *a*), conică (fig. 3.20, *b*) sau sferică. Aceste suprafețe trebuie să fie de revoluție în jurul axei arborelui pentru a permite mișcarea de rotație a acestuia.

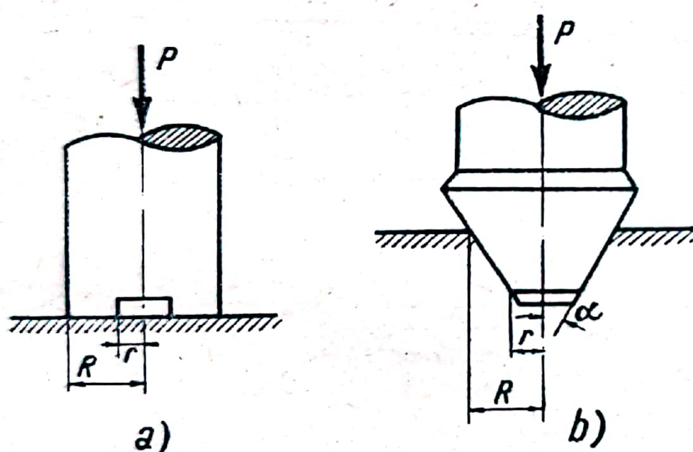


Fig. 3.20.

Dacă notăm cu P forța axială care apasă arborele, se demonstrează că atunci cînd arborele este pus în mișcare prin acțiunea unui cuplu exterior de moment M, forțele de frecare de alunecare ce iau naștere în toate punctele de contact ale arborelui cu lagărul sau în raport cu axa arborelui dau un moment total, a cărui valoare este:

$$M_f=\mu\, kP, \tag{3.7}$$

în care mărimea k are dimensiunea unei lungimi. Ea are diferite expresii după forma pivotului, după cum se arată în tabela 3.5.

Frecarea de pivotare are multe aplicaţii în tehnică ; ea apare la rezemarea unui arbore care în timp ce se mişcă suportă presiuni axiale (fig. 3.21) sau la ambreiajele progresive cu con (fig. 3.22, *a*) sau disc (fig. 3.22, *b*), folosite în maşinile de transport.

Tabela 3.5

Coeficientul frecării de pivotare

Pivotul	Valoarea lui k
Plan	$\frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$
Conic	$\frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$

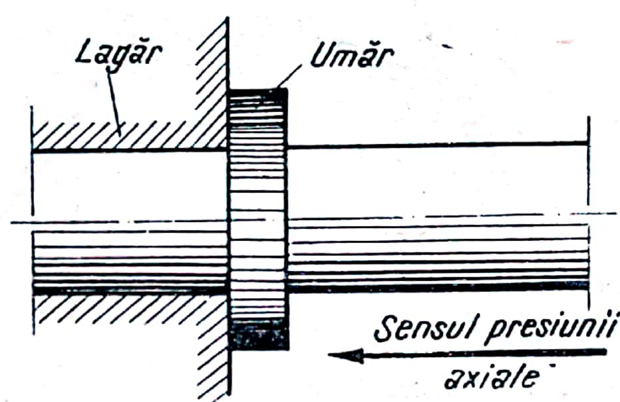


Fig. 3.21.

e) **Frecarea firelor, cablurilor şi benzilor.** În tehnică se întîlnesc adesea situaţii în care un fir (cablu sau bandă) este trecut peste o piesă de formă cilindrică (scripete, tobă, tambur) astfel încît fie că cilindrul de înfăşurare este fix şi firul poate avea o mişcare relativă faţă de el, fie că firul este fix şi cilindrul de înfăşurare este mobil, fie că, în sfîrşit, atît firul cît şi cilindrul se află în mişcare, forţele aplicate fiind de aşa natură încît între fir şi cilindru poate lua naş-

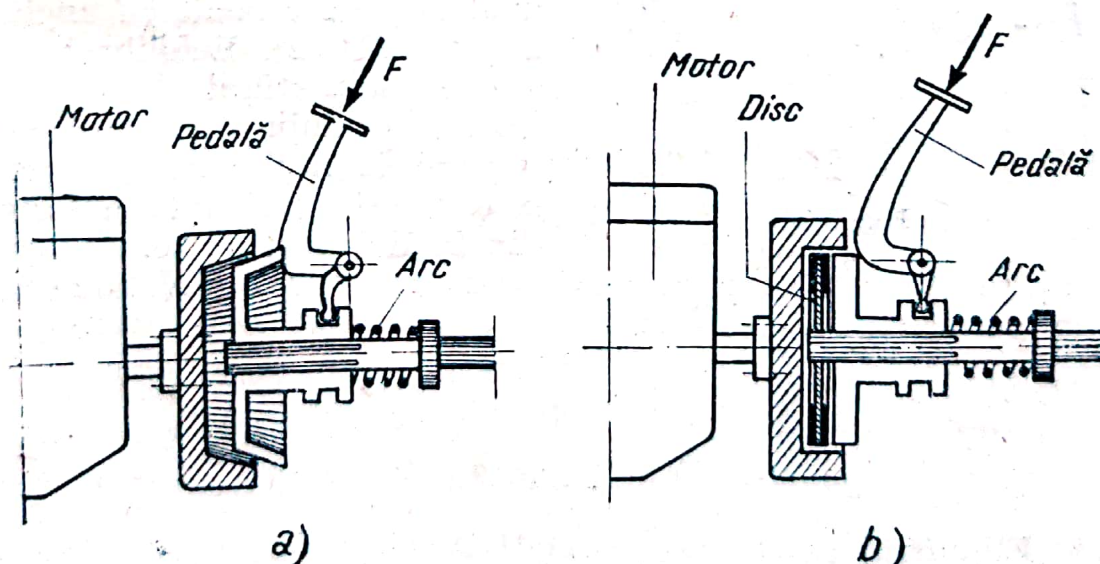


Fig. 3.22.

tere o mişcare relativă. În toate aceste situaţii, după cum rezultă din experienţă, tensiunile la capetele celor două fire nu sînt egale; diferenţa dintre ele este produsă de forţele de frecare ce iau naştere în punctele de contact ale firului cu cilindrul. În cele ce urmează ne propunem să găsim relaţia dintre tensiunile care apar la cele două extremităţi ale firului. Pentru aceasta,

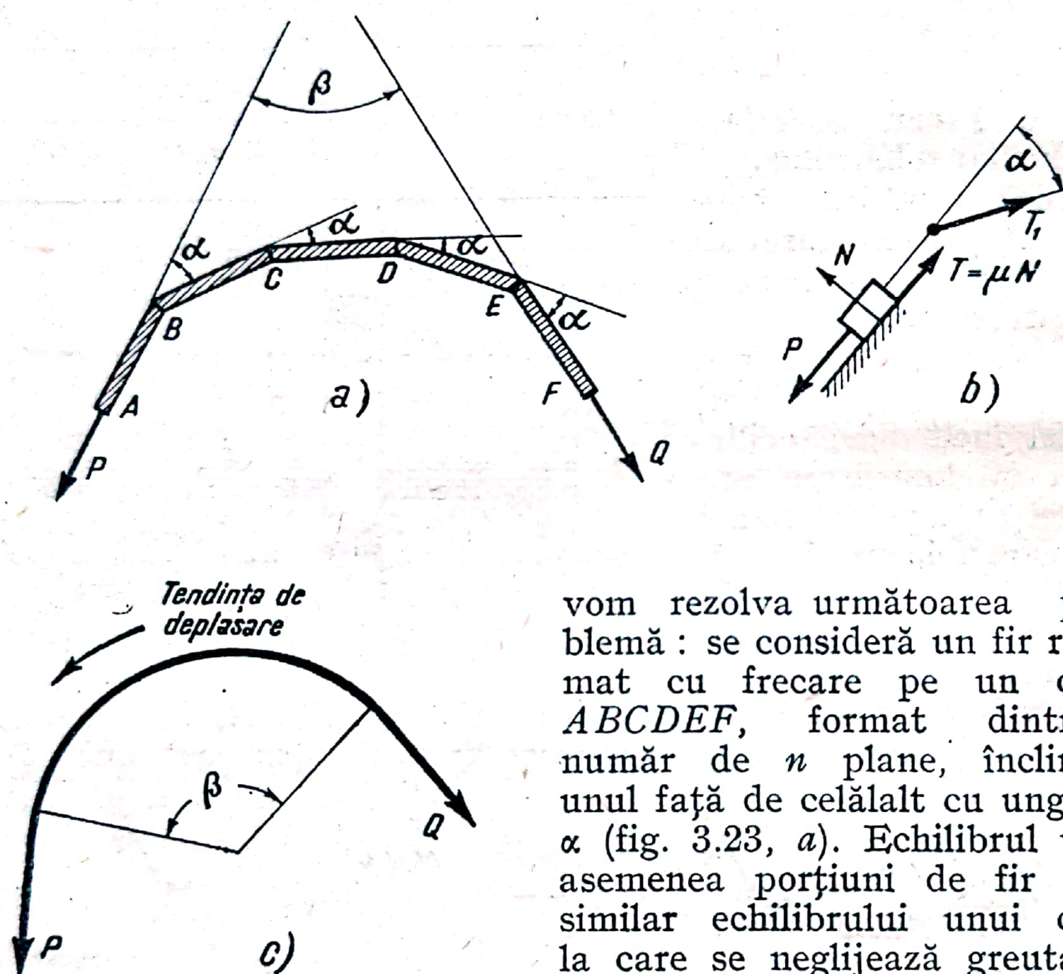


Fig. 3.23.

vom rezolva următoarea problemă: se consideră un fir rezemat cu frecare pe un corp *ABCDEF*, format dintr-un număr de *n* plane, înclinate unul faţă de celălalt cu unghiul α (fig. 3.23, *a*). Echilibrul unei asemenea porţiuni de fir este similar echilibrului unui corp la care se neglijează greutatea şi care este acţionat de forţele din figura 3.23, *b*: tensiunile P şi T_1, reacţiunea normală N şi forţa de frecare $T = \mu N$. Din ecuaţiile de echilibru deducem:

$$(\textstyle\sum_{ix} = 0) - P + \mu N + T_1 \cos\alpha = 0,$$

$$(\textstyle\sum_{iy} = 0)\ (N - T_1 \sin\alpha = 0)$$

Eliminînd reacţiunea normală N obţinem:

$$P = T_1 (\cos\alpha + \mu \sin\alpha). \tag{3.8}$$

Pentru cea de-a doua porţiune, locul lui P îl ia T_1, iar locul lui T_1 îl ia T_2, deci :

$$T_1 = T_2\ (\cos\alpha + \mu \sin\alpha).$$

Procedînd în acelaşi mod şi pentru restul porţiunilor, avem :

$$T_2 = T_3(\cos\alpha + \mu \sin\alpha),$$

$$T_{n-1} = Q(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)$$

Înlocuind din aproape în aproape pe $T_{n-1}, T_{n-2}, \ldots, T_2, T_1$ obţinem :

$$P = Q(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)^n. \qquad (3.9)$$

Să presupunem acum că curba $ABCDEF$ tinde către un cerc (fig. 3.23, c) ; în acest caz numărul n al porţiunilor tinde către infinit, în timp ce unghiul α se micşorează tinzînd către zero. Deoarece unghiul α devine foarte mic vom putea pune în expresia (3.9) $\cos\alpha \approx 1$ şi $\sin\alpha \approx \alpha = \frac{\beta}{n}$, β fiind unghiul laturilor extreme ; rezultă :

$$P = Q\left(1 + \mu \frac{\beta}{n}\right)^n. \qquad (3.10)$$

În cazul cercului, vom avea :

$$P = Q \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\mu\beta}{n}\right)^n.$$

Se ştie că :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

deci în cazul nostru vom avea :

$$P = Qe^{\mu\beta}. \qquad (3.11)$$

Dacă avem celălalt sens de mişcare rezultă :

$$Q = Pe^{\mu\beta}. \qquad (3.12)$$

Reunind între ele aceste două formule obţinem limitele de variaţie ale raportului $\frac{P}{Q}$ al tensiunilor extreme :

$$e^{-\mu\beta} \leqslant \frac{P}{Q} \leqslant e^{\mu\beta}. \qquad (3.13)$$

Valorile expresiei $e^{\mu\beta}$ se găsesc în tabele pentru diferite valori ale lui μ şi β.

Frecarea firelor, benzilor şi cablurilor intervine adesea în tehnică; astfel, marinarul poate reţine cu o forţă $\overline{P}$ foarte mică un vas care acţionează la cealaltă extremitate a firului cu o forţă $\overline{Q}$ mult mai mare decît $\overline{P}$ înfăşurînd cablul de mai multe ori pe bornă (fig. 3.24). Frîna cu cablu (fig. 3.25, *a*) şi frînele cu segmenţi ale autovehiculelor (fig. 3.25, *b*) funcţionează pe baza frecării firelor.

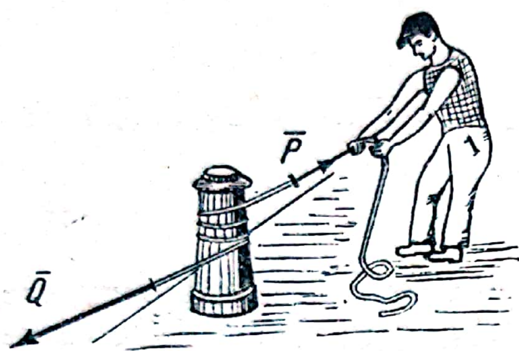
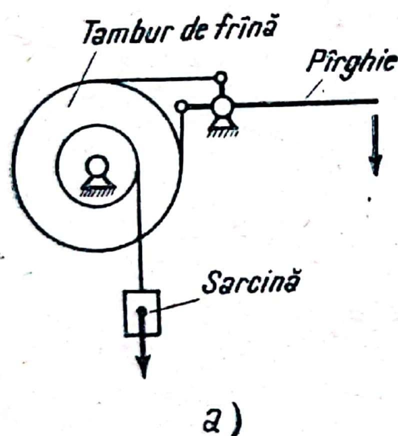


Fig. 3.24.

După cum am văzut din exemplele de mai sus, frecările au o deosebită importanţă în tehnică, atît prin efectul lor dăunător cît şi datorită laturii pozitive a acţiunii lor.

Într-adevăr, datorită frecărilor, o bună parte din energia consumată de maşini se pierde în lucrul mecanic pentru învingerea lor, lucru mecanic care fie că se transformă în căldură ridicînd temperatura pieselor în mişcare, fie că produce uzura suprafeţelor în contact. În figura 3.26 sînt arătate cîteva surse de frecare în organele mobile ale unei maşini cu abur.



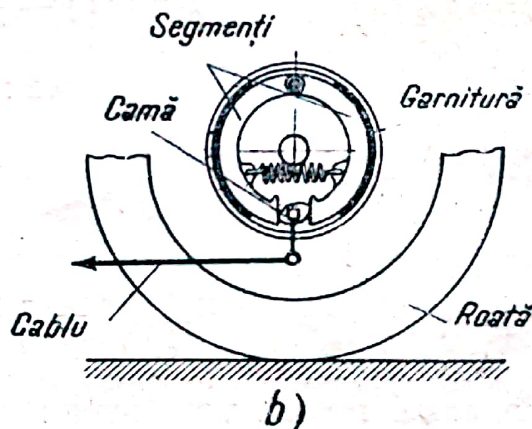


Fig. 3.25.

Pentru atenuarea frecărilor, suprafeţele în contact se ung cu *unsori* sau *lubrifianţi*.

Pe de altă parte, frecările joacă şi un rol pozitiv; astfel, fără frecare, rostogolirea roţilor vehiculelor, rezemarea unei scări pe perete şi podea, autofrînarea unui şurub care rămîne fixat în locaşul său ar fi imposibile. O serie de dispozitive şi

organe de maşini, cum ar fi : transmisiile prin fricţiune, transmisiile cu curele, laminoarele, cleştii de apucat ş.a., îşi bazează funcţionarea tocmai pe acţiunea forţelor de frecare. De asemenea, funcţionarea frînelor ar deveni imposibilă fără acţiunea frecării, fapt care ar exclude folosirea acestor organe de maşini

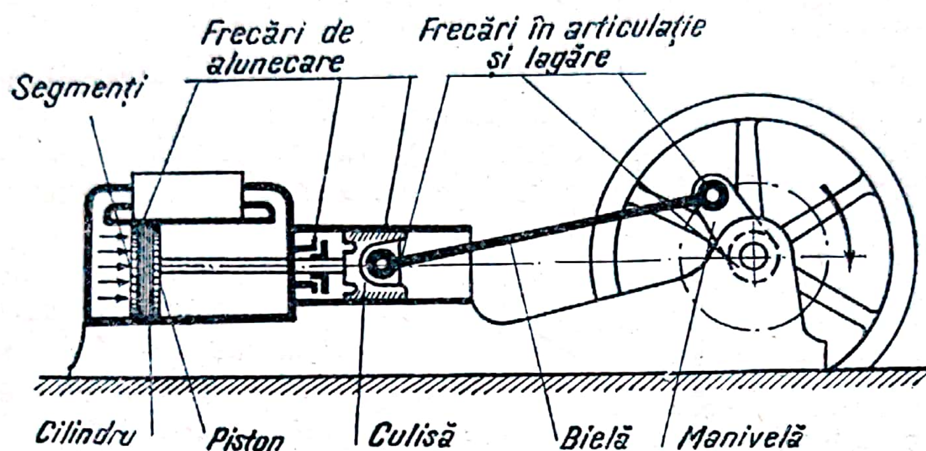


Fig. 3.26.

atît de importante pentru siguranţa funcţionării şi protecţia muncii celor ce deservesc maşinile.

f) **Rezolvarea problemelor de echilibru cu frecare**. Apariţia forţelor de frecare nu modifică în mod principial studiul echilibrului sistemelor materiale. Elementele provenite din frecare (forţe şi cupluri) se introduc în calcule alături de celelalte forţe şi cupluri date sau provenind din legăturile fără frecare. După aceasta, problemele de echilibru cu frecare se rezolvă în acelaşi mod ca şi celelalte probleme de echilibru studiate pînă aci.

Pentru a nu avea nedeterminări, se va considera în general că echilibrul este „la limită" , adică corpul respectiv este pe punctul de a fi pus în mişcare ; în acest mod, forţa sau cuplul de frecare respectiv au valorile lor maxime.

8. Stabilitatea echilibrului

a) **Echilibru stabil, nestabil şi indiferent.** Să presupunem că avem un corp care sub acţiunea unui sistem de forţe poate ocupa mai multe poziţii ; într-una dintre aceste poziţii corpul rămîne în echilibru. Vom spune despre corpul dat că se află într-o poziţie de echilibru *stabilă* sau în *echilibru stabil* dacă aducîndu-l din această poziţie într-o poziţie vecină el tinde

Brig. I. 57.

să-şi reia imediat poziţia iniţială de echilibru. În caz contrar, cînd deplasînd corpul din poziţia de echilibru într-o poziţie vecină se depărtează de această poziţie, vom spune că se află în *echilibru nestabil*. Mai există şi o a treia situaţie, cînd poziţiile vecine poziţiei de echilibru iniţiale sînt ele însele noi poziţii de echilibru ; în acest caz, vom spune despre corpul respectiv că se află în *echilibru indiferent*.

Pentru corpurile aflate numai sub acţiunea greutăţii proprii există o regulă simplă care ne arată dacă ele se află în echilibru stabil, nestabil sau indiferent ; *poziţia de echilibru stabil este acea dintre poziţiile permise de legăturile corpului respectiv pentru care centrul de greutate se află cel mai jos ; poziţia pentru care centrul de greutate al corpului se află cel mai sus este poziţia de echilibru nestabil*. Poziţiile de echilibru pentru care centrul de greutate se află la o aceeaşi înălţime faţă de planul orizontal sînt poziţiile de echilibru indiferent. În figura 3.27 sînt arătate poziţiile de echilibru a trei corpuri : un corp articulat într-un punct fix (bară, pîrghie), o bilă rezemată pe o suprafaţă şi un con circular drept, aflate sub acţiunea a două forţe : greutatea proprie şi reacţiunea legăturii. Pentru toate aceste corpuri poziţia de echilibru (*a*) este o poziţie de echilibru stabil, poziţia de echilibru (*b*) este o poziţie de echilibru nestabil, iar poziţia de echilibru (*c*) este o poziţie de echilibru indiferent.

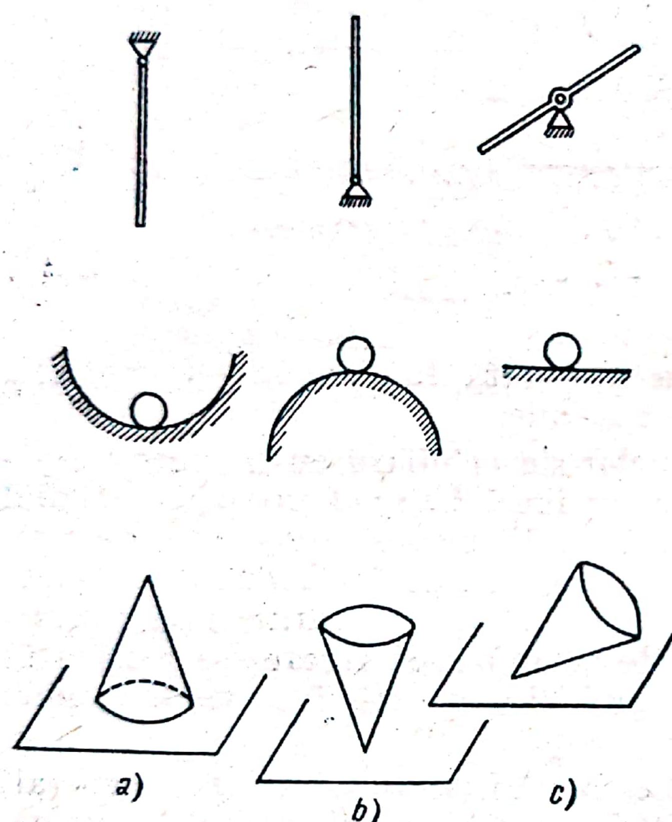


Fig. 3.27.

b) **Stabilitatea corpurilor rezemate pe o bază de susţinere plană.** Să considerăm un corp de o formă oarecare, fixat pe o bază de susţinere plană şi acţionat de un sistem de forţe coplanare. Baza de susţinere poate avea orice formă : cerc, dreptunghi, pătrat. Sub acţiunea forţelor care-i sînt aplicate, corpul poate rămîne în echilibru pe baza sa de susţinere sau se poate răs-

turna în jurul unei punct sau unei muchii a acestei baze. Pentru a studia posibilitatea acestei răsturnări vom proceda astfel: intersectăm planul P al forţelor care acţionează corpul cu perimetrul bazei de susţinere; din această intersecţie rezultă două puncte, care reprezintă punctele în jurul cărora este posibilă răsturnarea, şi pe care le vom denumi *puncte de răsturnare.*

Să alegem unul dintre aceste puncte şi să împărţim forţele care acţionează corpul în două categorii: o parte din forţe al căror momente în raport cu unul dintre cele două puncte de răsturnare este astfel încît ele caută să răstoarne corpul în jurul unuia dintre puncte ridicîndu-l de pe baza sa de susţinere, şi o altă parte care caută să-l ţină în contact cu baza de susţinere. Suma momentelor forţelor din prima categorie în raport cu punctul de răsturnare o vom numi *moment de răsturnare* (M_c), iar suma momentelor forţelor din cea de-a doua categorie în raport cu punctul de răsturnare o vom numi *moment de stabilitate* (M_s). Pentru ca să n-avem răsturnarea corpului va trebui ca:

$$M_s > M_r.$$

Raportul:

$$\varepsilon = \frac{M_s}{M_r}$$

care măsoară stabilitatea corpului în raport cu punctul de răsturnare îl vom denumi *coeficient de stabilitate.* Pentru ca să n-avem răsturnare trebuie ca $\varepsilon > 1$.

Studiul stabilităţii corpurilor intervine în practică la macarale şi la diferite instalaţii avînd sarcini în consolă, unde se pune problema determinării unor elemente de construcţii (fundaţii, contragreutăţi etc.) astfel ca să se asigure stabilitatea instalaţiei respective în anumite condiţii date.

9. Aplicaţii

a) Pe şantierele de construcţia locuinţelor pentru oamenii muncii din patria noastră transportul materialelor de la un loc la altul se face cu macarale de tipul celor arătate în figura 3.28. Se cere să se studieze stabilitatea acestei macarale.

Planul forțelor care acționează macaraua este vertical, iar planul bazei de susținere este orizontal; forma bazei de susținere este un dreptunghi avînd drept colțuri axele de susținere ale roților de transport ale macaralei. Intersectînd planul forțelor cu planul bazei de susținere se obțin cele două puncte de răsturnare A și B.

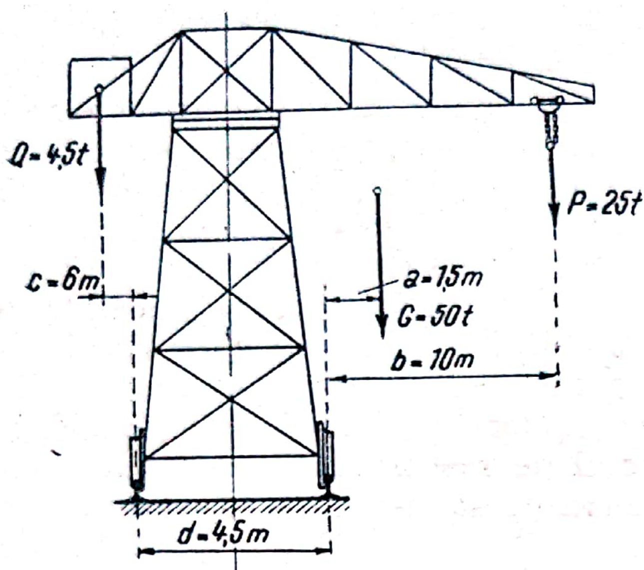


Fig. 3.28.

Stabilitatea sub sarcină. Cînd macaraua este încărcată, ea se află sub acțiunea forțelor P, G și Q (fără a lua în considerare reacțiunile). Momentele de răsturnare și de stabilitate sînt:

— momentul de răsturnare față de punctul A;

$$M_{rA}=Ga+Pb=50\times1{,}5+25\times10=75+250=325 \text{ tfm};$$

— momentul de stabilitate față de punctul A:

$$M_{sA}=Q(c+d)=45\times10{,}5=472{,}5 \text{ tfm}.$$

Coeficientul de stabilitate este:

$$\varepsilon_A=\frac{M_{sA}}{M_{rA}}=\frac{472{,}5}{325}=1{,}45.$$

— Momentul de răsturnare față de B:

$$M_{rB}=Qc=45\times6=270 \text{ tfm}.$$

— Momentul de stabilitate față de B:

$$M_{sB}=G(a+d)+P(b+d)=50\times6+25\times14{,}5=300+362{,}5=$$
$$=662{,}5 \text{ tfm}.$$

Coeficientul de stabilitate față de punctul B este:

$$\varepsilon_B=\frac{M_{sB}}{M_{rB}}=\frac{662{,}5}{270}\approx2{,}45$$

Stabilitatea în gol. Cînd macaraua lucrează în gol (fără sarcină), ea se află numai sub acțiunea forțelor G și Q (fără a lua în considerare reacțiunile). Momentele de răsturnare și stabilitate sînt :

— momentul de răsturnare față de A :

$$M_{rA}=Ga=50\times 1{,}5=75 \text{ tfm};$$

— momentul de stabilitate față de A :

$$M_{sA}=Q(c+d)=45\times 10{,}5=472{,}5 \text{ tfm}.$$

Coeficientul de stabilitate este :

$$\varepsilon_A=\frac{M_{sA}}{M_{rA}}=\frac{472{,}5}{75}=6{,}3.$$

— Momentul de răsturnare față de B :

$$M_{rB}=Qc=45\times 6=270 \text{ tfm}.$$

— Momentul de stabilitate față de B :

$$M_{sB}=G(a+d)=50\times 6=300 \text{ tfm}.$$

Coeficientul de stabilitate este :

$$\varepsilon_B=\frac{M_{sB}}{M_{rB}}=\frac{300}{270}=1{,}1.$$

Toți coeficienții de stabilitate fiind supraunitari, macaraua nu se va răsturna.

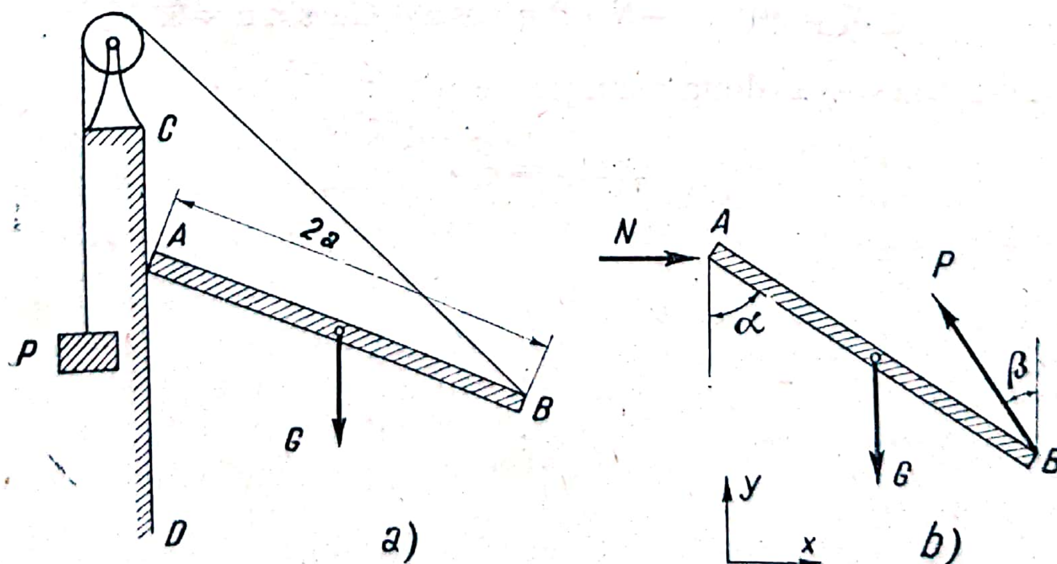


Fig. 3.29.

b) Se cere să se determine poziţia de echilibru şi reacţiunile unei bare de lungime $2a$ şi greutate G rezemată în extremitatea A pe un perete vertical luciu şi prinsă în extremitatea B cu un fir trecut peste un scripete; la extrmitatea cealaltă a firului este atîrnată greutatea P (fig. 3.29, a).

R e z o l v a r e

Poziţia barei AB este determinată de doi parametri, spre exemplu distanţa $CA = x$ şi unghiul $DAB = \alpha$ al barei cu peretele, sau unghiul $DAB = \alpha$ şi unghiul β făcut de fir cu verticala (fig. 3.29, b), alegem cea de-a doua variantă.

Tabela 3.6

Datele şi necunoscutele într-o problemă de statică

Date	Forţe	G, P
	Mărimi geometrice şi mecanice	a
Necunoscute	Poziţia de echilibru	α, β
	Reacţiuni	N

Tensiunea din fir este egală cu greutatea P, iar peretele transmite barei o reacţiune N, normală pe CD.

Datele şi necunoscutele sînt date în tabela 3.6.

Ecuaţiile de echilibru sînt:

$$(\Sigma F_x = 0) \qquad N - P \sin\beta = 0,$$

$$(\Sigma F_y = 0) \qquad P \cos\beta - G = 0,$$

$$(\Sigma M_B = 0) \qquad -N \cdot 2a \cos\alpha + Ga \sin\alpha = 0.$$

Din cea de-a doua ecuaţie rezultă:

$$\cos\beta = \frac{G}{P},$$

iar din prima:

$$N = P \sin\beta = P\sqrt{1 - \frac{G^2}{P^2}} = \sqrt{P^2 - G^2}.$$

Din ultima ecuaţie rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2N}{G} = \frac{2\sqrt{P^2 - G^2}}{G}.$$

Deoarece toate necunoscutele sînt exprimate ca funcții de date, problema se consideră rezolvată.

c) Un recipient care conține gaz la presiunea $p_2 = 3$ kgf/cm² este alimentat de la o rețea de gaz avînd presiunea $p_1 = 5$ kg/cm², prin intermediul regulatorului arătat în figura 3.30, cu ajutorul căruia se menține o presiune constantă în recipient. Se cere să se calculeze valoarea contragreutății G și să se explice din punct de vedere mecanic funcționarea regulatorului, neglijînd frecările.

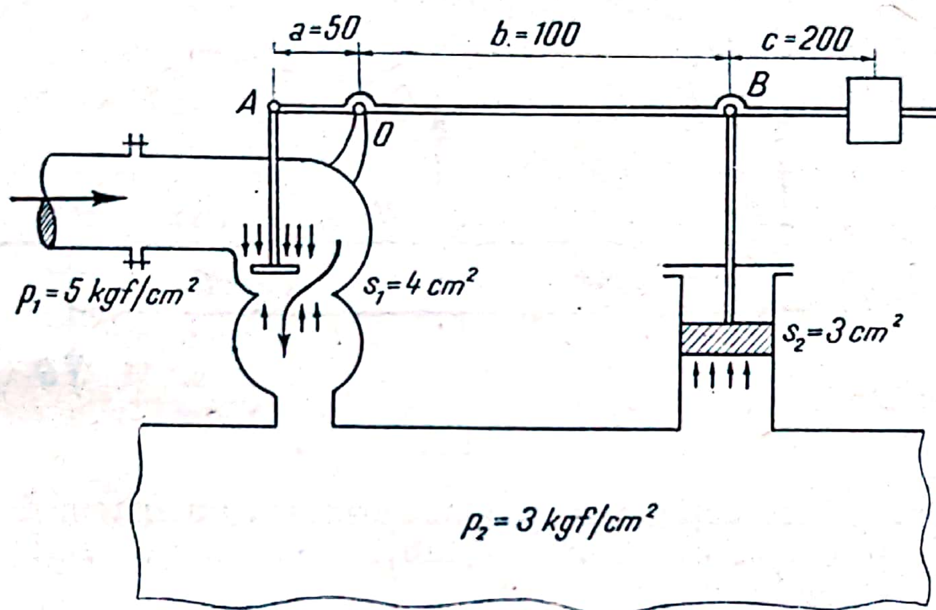


Fig. 3.30.

R e z o l v a r e

Regulatorul din figura 3.30 funcționează astfel: pentru valorile indicate ale presiunilor din conducta de alimentare și din recipient, ventilul care leagă conducta de alimentare cu recipientul este închis, pîrghia aflîndu-se în echilibru în poziția orizontală. Echilibrul pîrghiei este asigurat în această poziție de egalitatea momentelor date față de punctul O pe de o parte de contragreutatea G, iar pe de altă parte de forțele de presiune ale gazului pe fețele ventilului și pistonului. Dacă presiunea în recipient scade, momentul dat de contragreutate este mai mare decît momentele date de forțele care provin din acțiunea gazului asupra ventilelor și ventilul din conducta de alimentare se deschide.

Pentru determinarea valorii contragreutății G, vom studia echilibrul pîrghiei AOB. Ea este supusă următoarelor forțe (fig. 3.31):

— greutatea G;

— forța $P_1 = (p_1 - p_2)s_1$, în care s_1 este aria ventilului (se neglijează locul ocupat de tijă);

— forța $P_2 = p_2 s_2$, în care s_2 este aria pistonului;

— reacțiunea R a articulației O, care are numai componenta verticală, deoarece nu există nici o forță orizontală care să acționeze pîrghia.

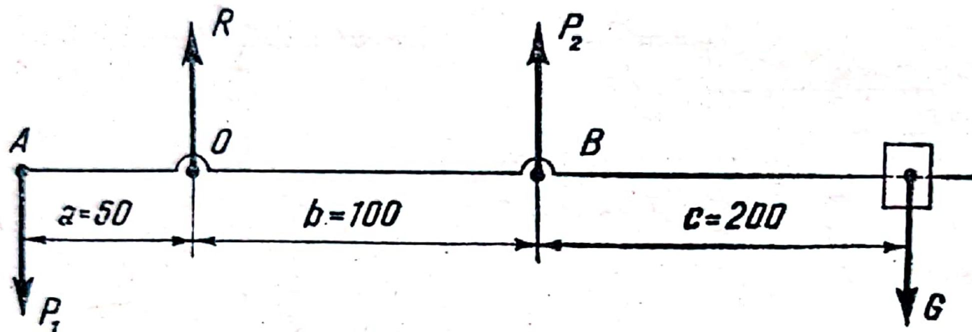


Fig. 3.31.

Forțele care acționează pîrghia formează un sistem de forțe paralele și coplanare. Conform tabelei 3.2 se pot scrie două ecuații de echilibru:

$$(\Sigma F_{iy} = 0) \qquad R - P_1 + P_2 - G = 0,$$

$$(\Sigma M_O = 0) \qquad P_1 a + P_2 b - G(b + c) = 0.$$

Din aceste ecuații deducem, valorile celor două necunoscute R și G:

$$R = P_1 + G - P_2,$$

$$G = \frac{P_1 a + P_2 b}{b + c}.$$

Înlocuind valorile numerice obținem:

$$G = \frac{(5-3) \times 4 \times 5 + 3 \times 3 \times 10}{10 + 20} = \frac{130}{30} = 4{,}33 \text{ kgf},$$

$$R = (5 - 3) \times 4 + 4{,}33 - 3 \times 3 = 3{,}33 \text{ kgf}.$$

Cele două momente care fac echilibrul pîrghiei AOB sînt deci:

— momentul contragreutății G, care caută să deschidă ventilul de admisie, avînd valoarea $M_1 = G(b + c)$;

— momentul dat de forțele P_1 și P_2, care caută să închidă ventilul de admisie, avînd valoarea $M_2 = P_1 a + P_2 b$.

Să presupunem că presiunea în recipient scade cu o cantitate x devenind $(p_2 - x)$. Cele două momente au valorile :

$$M_1 = G(b + c) = 4{,}33(10 + 20) = 129{,}9 \approx 130 \quad \text{kgf/cm},$$
$$M_2 = (5 - 3 + x)4 \times 5 + 3 \times (3 - x) \times 10 =$$
$$= 40 + 20x + 90 - 30x = 130 - 10x$$

Se vede că $M_2 < M_1$, deci ventilul de admisie se va deschide imediat ce valoarea $10x$ va învinge momentele forțelor de frecare.

d) Un sistem de frînare a firului la o mașină de filat se compune dintr-o serie de bare care se pot deplasa cu ajutorul unor cadre, ca în figura 3.32, *a*. În poziția în care firul nu se freacă de bare, el necesită pentru a fi tras o forță $P = 120$ gf. Se cere valoarea forței minime cu care trebuie tras firul în poziția „frînat" (fig. 3.32,*b*) cînd toate centrele barelor sînt coliniare. Se dau $l = 36$ mm, $d = 20$ mm, $\mu = 0{,}5$, numărul barelor $n = 5$.

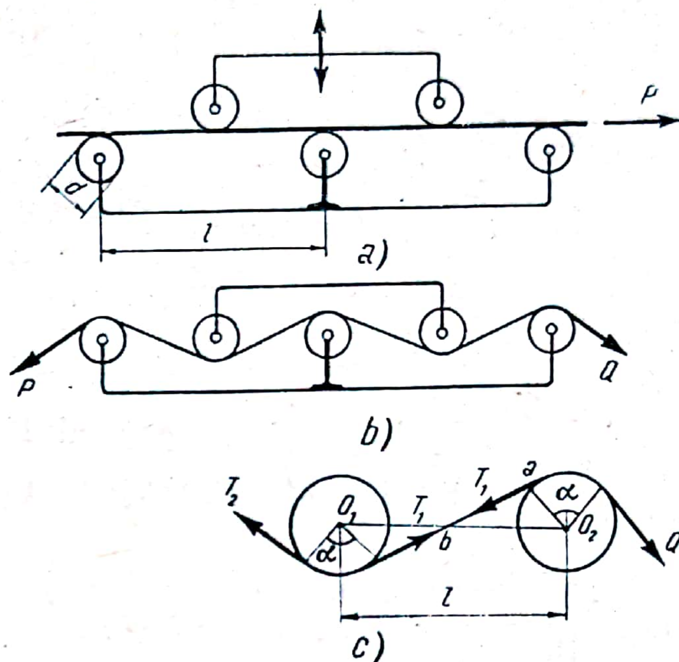


Fig. 3.32.

R e z o l v a r e

Să considerăm două bare vecine (fig. 3.32, *c*). Relația dintre tensiunile Q și T_1 este dată de formula (3.12) :

$$Q = T_1 e^{\mu\alpha}.$$

Pentru cea de-a doua bară avem de asemenea :

$$T_1 = T_2 e^{\mu\alpha},$$

care înlocuită în prima dă :

$$Q = T_2 e^{2\mu\alpha}.$$

Procedînd la fel din aproape în aproape găsim :

$$Q = P e^{n\mu\alpha},$$

n fiind numărul barelor.

Pentru calculul numeric, determinăm mai întîi din triunghiul abO_2 (fig. 3.32, *c*) valoarea unghiului α în radiani :

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{O_2a}{O_2b}=\frac{\frac{d}{2}}{\frac{l}{2}}=\frac{d}{l}=\frac{20}{36}=0{,}555,$$

$$\alpha=67°40'=1{,}18 \text{ rad.}$$

Rezultă :

$$Q=120\cdot e^{5\times 1{,}48\times 0{,}5}=228 \text{ kgf.}$$

Capitolul IV

APLICAŢII TEHNICE ALE STATICII

În cele ce urmează se va studia echilibrul cîtorva sisteme de corpuri denumite *maşini simple* şi care au aplicaţii în tehnică. Ele servesc în general la învingerea unor forţe sau cupluri avînd valori mai mari cu ajutorul unor forţe sau cupluri de valori mult mai mici, accesibile unei acţiuni manuale. În general, greutăţile corpurilor care alcătuiesc maşina simplă respectivă se neglijează în raport cu restul forţelor care apar.

Forţa sau cuplul care se aplică se numeşte *forţă motoare*, respectiv *cuplu motor*, iar forţa sau cuplul care trebuie învins se numeşte *forţă rezistentă* sau *cuplu rezistent*.

Problema care trebuie rezolvată în cazul acestor maşini constă în a determina relaţia dintre forţa motoare sau cuplul motor şi forţa rezistentă sau cuplul rezistent.

Tot în acest capitol vor fi studiate şi o serie de sisteme de corpuri formate din bare articulate la extremităţi şi denumite *grinzi cu zăbrele*.

1. Planul înclinat

Planul înclinat este un dispozitiv care serveşte la ridicarea unor greutăţi la înălţimi nu prea mari. În loc de a ridica o greutate la o anumită înălţime, fapt care uneori este imposibil deoarece greutatea respectivă depăşeşte forţa maximă a omului, o aşezăm pe un plan înclinat şi o tragem cu un cablu

sau cu un troliu în susul planului. În acest caz, forța cu care tragem cablul este mai mică decît greutatea ridicată. Asemenea operații de ridicare a greutăților pot fi văzute la rampele de încărcare și descărcare a vagoanelor.

Corpul care trebuie ridicat pe planul înclinat se află în echilibru sub acțiunea greutății sale G, care constituie forța rezistentă, a reacțiunii normale N, a forței de frecare T și a forței de ridicare dirijată în susul planului F_m, care constituie forța motoare (fig. 4.1).

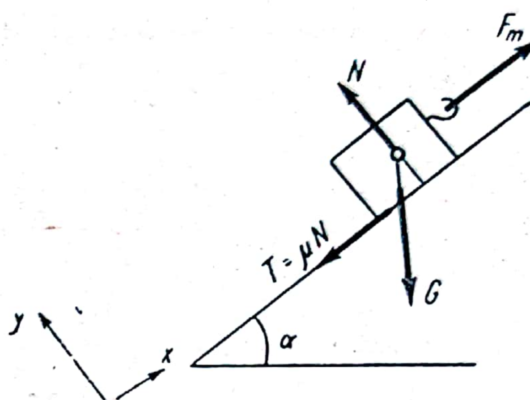


Fig. 4.1.

Considerînd acest sistem de forțe ca un sistem de forțe concurente și coplanare, ecuațiile de echilibru la limita de alunecare în susul planului se scriu:

$$(\Sigma F_{ix}=0) \qquad F_m-\mu N-G \sin\alpha=0,$$
$$(\Sigma F_{iy}=0) \qquad N-G \cos\alpha=0.$$

Eliminînd pe N între aceste două ecuații obținem:

$$F_m=G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=kG. \tag{4.1}$$

Coeficientul k este în general subunitar, ceea ce înseamnă că forța de tracțiune în lungul planului (F_m) este mai mică decît greutatea G.

Planul înclinat este cu atît mai util cu cît k este mai mic, deci cu cît α și μ sînt mai mici. Dacă $k>1$, planul înclinat nu-și atinge scopul de a reduce efortul nostru.

2. Pîrghia

Orice corp articulat și supus acțiunii a două forțe coplanare cu articulația poartă numele de *pîrghie*. Cele două forțe sînt forța motoare F_m și forța rezistentă F_r. Corpul poate fi o bară, o placă sau un corp avînd o formă oarecare.

Pîrghia are nenumărate aplicații în practică (fig. 4.2): astfel ea se întîlnește sub forma pedalei de frînă sau de la ambreiajul autovehiculelor (*a*), a culbutorului de acționat supapele motoarelor cu ardere internă (*b*), a cleștelui de scos cuie (*c*),

a foarfecelui de tăiat (*d*), a cleştelui de apucat materialul de la forjă (*e*), a maşinii de sudat (*f*), a menghinei de atelier (*g*), a supapei de siguranţă (*h*), a bridei de prindere a piesei pe masa unei maşini-unelte (*i*) etc.

Pentru a determina relaţia dintre forţa motoare şi forţa rezistentă vom scrie ecuaţia de momente în raport cu articulaţia O. Pîrghia este acţionată de următoarele forţe (fig. 4.3, *a*) :

— forţa motoare F_m;
— forţa rezistenţă F_r;
— reacţiunea R din articulaţia O, avînd modulul şi orientarea necunoscute ;
cuplul forţelor de frecare din articulaţia O; expresia acestui cuplu este :

$$M_f = \mu rN.$$

Din poligonul forţelor (fig. 4.3, *b*) deducem valoarea reacţiunii R:

$$R = \sqrt{F_m^2 + F_r^2 + 2F_mF_r \cos \measuredangle(\overline{F}_m, \overline{F}_r)}. \qquad (4.2)$$

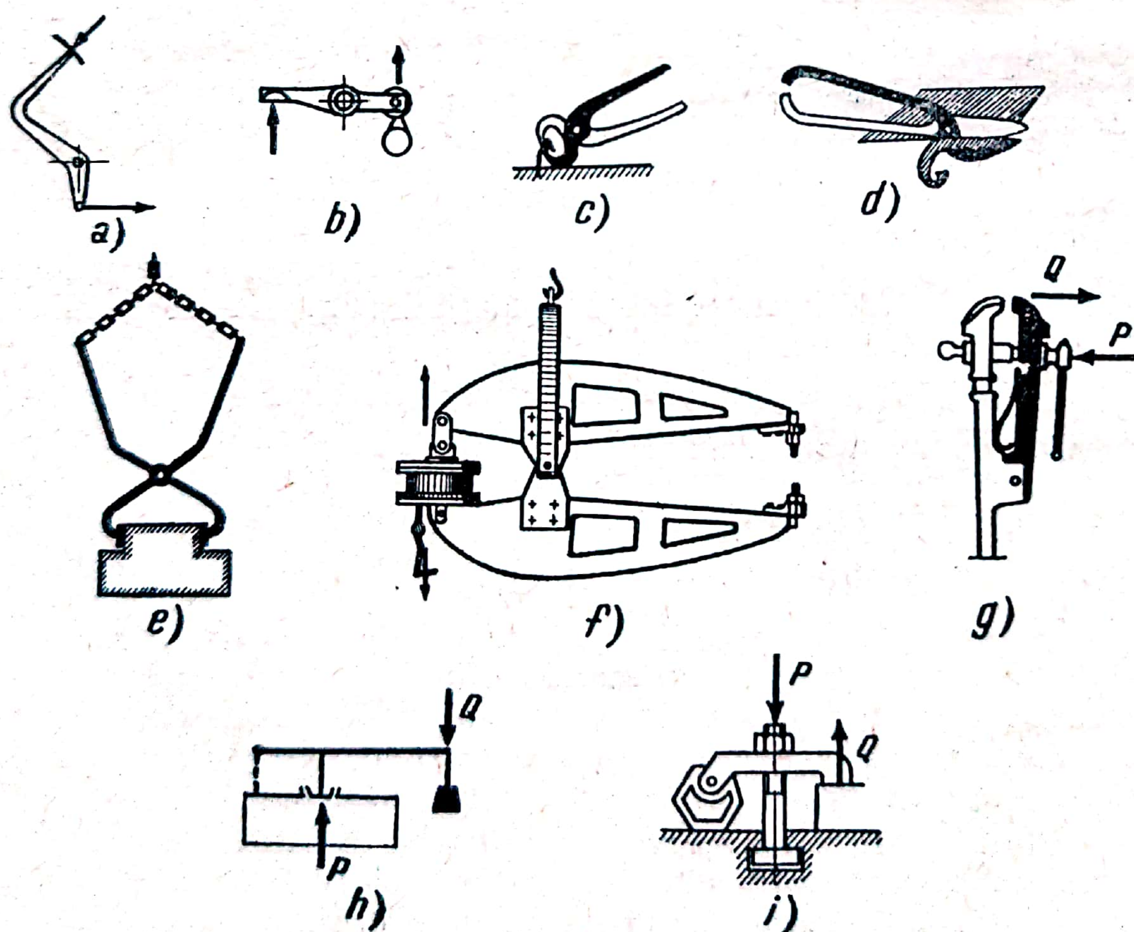


Fig. 4.2.

cu care avem:

$$M_f = \mu\, r \sqrt{F_m^2 + F_r^2 + 2\,F_m F_r \cos \sphericalangle (\overline{F}_m, \overline{F}_r)}. \qquad (4.3)$$

Greutatea pîrghiei se neglijează.

Din cele trei ecuații pe care le putem scrie în cazul sistemelor de forțe coplanare (tabela 3.2) vom scrie numai una: ecuația de momente în raport cu articulația O:

$$(\Sigma M_0 = 0) \; - F_m a + F_r b + \\ + \mu' r \sqrt{F_m^2 + F_r^2 + 2\,F_m F_r \cos \sphericalangle (\overline{F}_m, \overline{F}_r} = 0 \qquad (4.4)$$

Prin ridicare la pătrat obținem o ecuație de gradul al doilea, din care deducem două valori ale forței motoare F_m; cea care convine problemei este valoarea pozitivă cea mai mică.

În practică se întîlnesc însă o serie de cazuri particulare, dintre care cele mai importante sînt următoarele:

— forțele F_m și F_r sînt paralele; aceasta înseamnă că:

$$\cos \sphericalangle (\overline{F}_m, \overline{F}_r) = \cos 0° = 1.$$

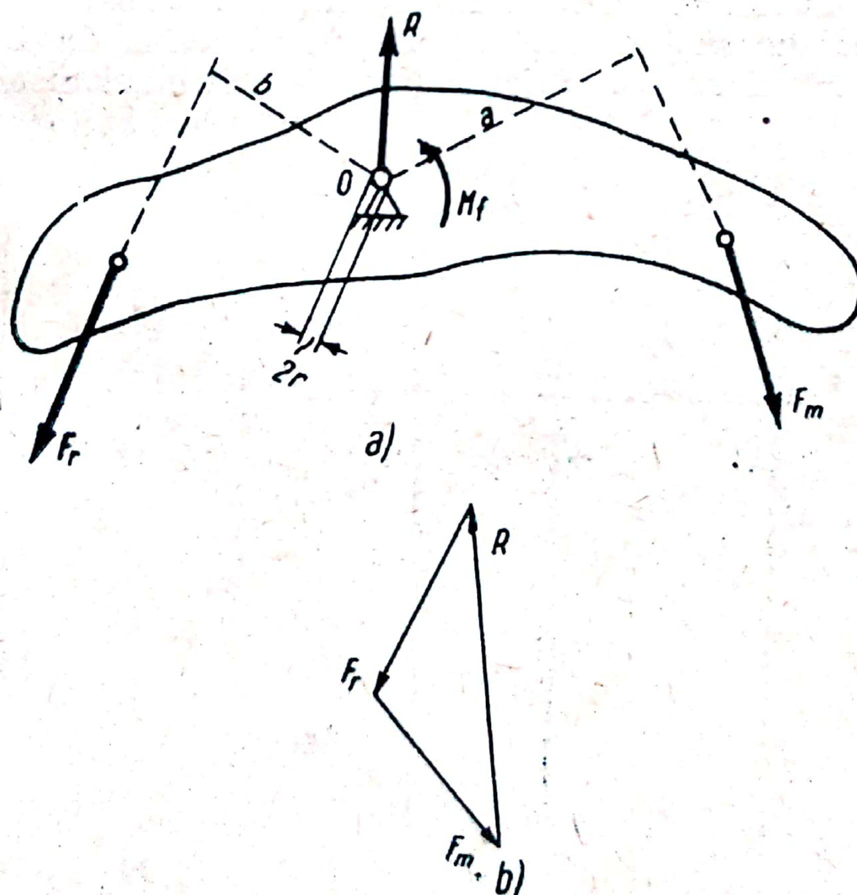


Fig. 4.3.

Expresia de sub radicalul din (4.4) devine un pătrat perfect şi rezultă :

$$F_m = \frac{b + \mu' r}{a - \mu' r} F_r = kF_r. \qquad (4.5)$$

Am obţinut o relaţie analogă celei din cazul planului înclinat ; şi în acest caz, pentru ca pîrghia să-şi poată atinge scopul de a reduce forţa rezistentă va trebui să existe relaţia $k \leqslant 1$.

Se neglijează frecarea din articulaţie ($\mu' = 0$). În acest caz, relaţia dintre forţa motoare şi cea rezistentă devine :

$$F_m = \frac{b}{a} F_r = k' F_r. \qquad (4.6)$$

Se observă că $k' < k$ adică, în acest caz, după cum era de aşteptat, forţa motoare este mai mică decît în cazul real cu frecare.

3. Scripeţii

a) **Scripetele cu ax fix** este unul dintre cele mai simple aparate de ridicat greutăţi. El se compune dintr-o roată avînd fie numai un singur şanţ la periferie, fie avînd două sau mai multe şanţuri de raze diferite (fig. 4.4), al cărei ax se poate

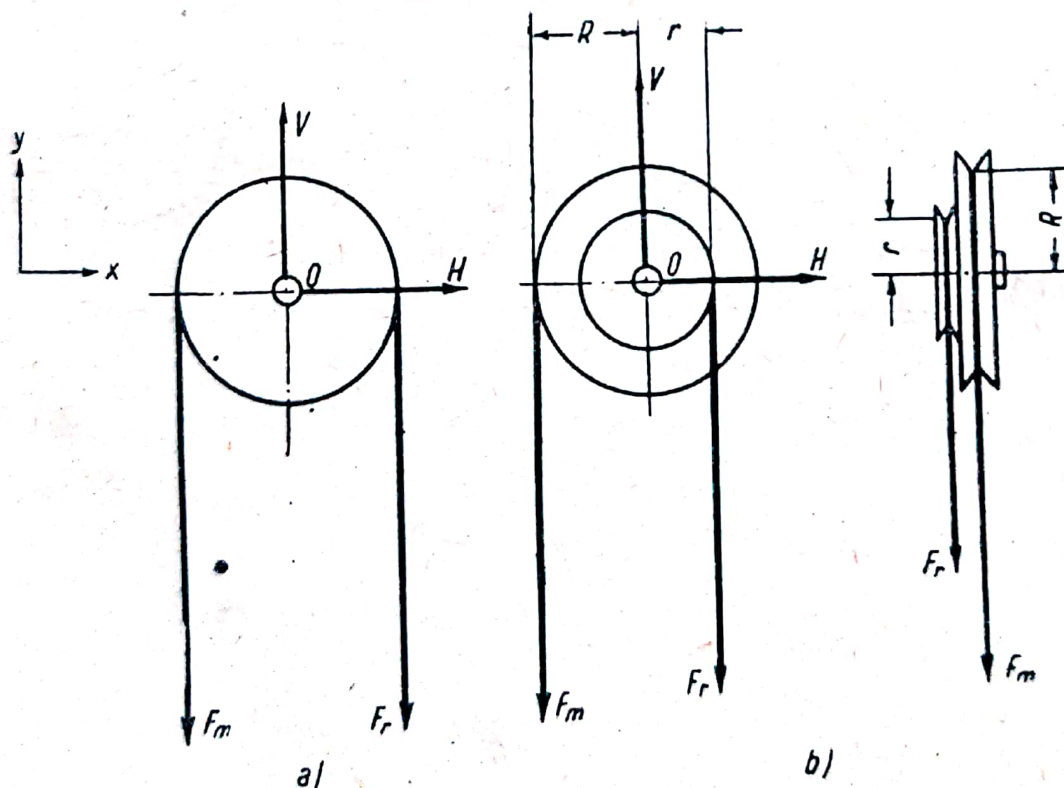


Fig. 4.4.

roti într-un lagăr fix, avînd la periferie un jgheab prin care este trecut un cablu sau un lanţ. De un capăt al firului se atîrnă corpul care trebuie ridicat, corp care constituie forţa rezistentă iar de celălalt capăt se trage cu o forţă F_m, care reprezintă forţa motoare.

Scripetele aduce o uşurare a ridicării greutăţilor prin faptul că în loc de a le trage de jos în sus le putem trage de sus în jos.

În repaus sau în mişcare uniformă, scripetele se află în echilibru sub acţiunea reacţiunilor H şi V din articulaţie şi a forţelor F_m şi F_r (greutatea scripetelui se neglijează). Scriind ecuaţiile de echilibru obţinem:

$$\begin{aligned} &(\Sigma F_x=0) && H=0, \\ &(\Sigma F_y=0) && V-F_m-F_r=0, \\ &(\Sigma M_O=0) && -F_m R+F_r R=0 \text{ (fig. 4.4, } a), \\ &(\Sigma M_O=0) && -F_m R+F_r r=0 \text{ (fig. 4.4, } b). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Din ultimele ecuaţii deducem:

$$F_m=F_r \qquad \text{(fig. 4.4, } a),$$

$$F_m=\frac{r}{R}F_r \qquad \text{(fig. 4.4, } b),$$

adică în cazul scripetelui cu un singur şanţ forţa motoare este egală cu forţa rezistentă, în timp ce în cazul scripetelui cu două şanţuri se obţine o reducere a forţei rezistente în raportul $\frac{r}{R}$, ca în cazul pîrghiei fără frecări (formula 4.6).

În realitate, relaţiile (4.7) nu sînt valabile decît cu o oarecare aproximaţie, deoarece am neglijat atît frecările din axul scripetelui cît şi rigiditatea cablului trecut peste scripete. Într-adevăr, în articulaţia O de rază a (fig. 4.5) apare un cuplu de frecare al cărui moment este:

$$M_f=\mu' aV=\mu' a(F_m+F_r), \quad (4.8)$$

deoarece din cea de-a doua ecuaţie a sistemului (4.7) rezultă:

$$V=F_m+F_r. \quad (4.9)$$

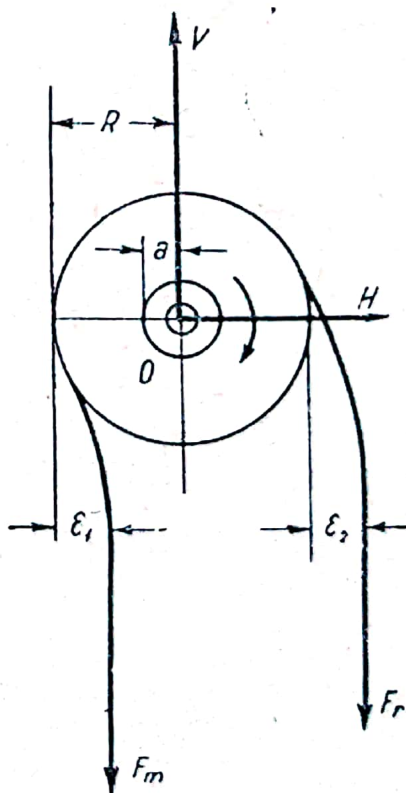


Fig. 4.5.

De asemenea, se constată practic că în timpul acţionării scripetelui cablul se înfăşoară astfel pe scripete, încît direcţia forţei motoare este mai aproape de axul scripetelui decît tangenta la scripete cu o distanţă oarecare ε_1, iar forţa rezistentă se depărtează de tangenta la scripete cu distanţa ε_2. În noile condiţii, ecuaţia de momente faţă de centrul scripetelui se scrie :

$$(\Sigma M_O = 0) \quad +F_m(R-\varepsilon_1) - F_r(R+\varepsilon_2) - \mu' a(F_m + F_r) = 0. \quad (4.10)$$

Din această ecuaţie rezultă relaţia dintre forţa motoare şi forţa rezistentă :

$$F_m = \frac{R - \mu' a + \varepsilon_2}{R + \mu' a - \varepsilon_1} F_r = kF_r. \quad (4.11)$$

În general $k > 1$ (practic $k = 1{,}05...1{,}2$), ceea ce înseamnă că forţa motoare este mai mare decît cea rezistentă, fapt care reduce avantajul scripetelui cu ax fix numai la schimbarea sensului forţei rezistente.

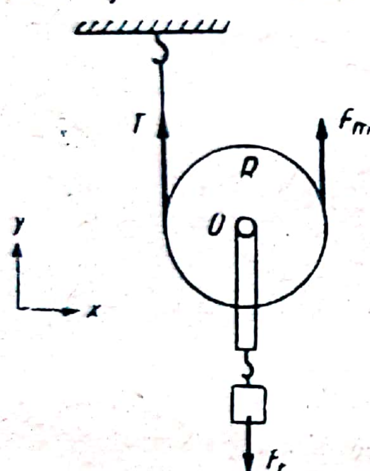


Fig. 4.6.

b) **Scripetele cu ax mobil** este format dintr-o roată cu ax mobil, avînd fixată pe axul său o furcă de care se atîrnă greutatea de ridicat. Un capăt al cablului se atîrnă de un cîrlig fix, iar de celălalt capăt se trage cu forţa motoare F_m (fig. 4.6).

Dacă nu ţinem seama de frecări, ecuaţiile de echilibru ale scripetelui sînt :

$$\begin{aligned} &(\Sigma F_y = 0) \quad T + F_m - F_r = 0\,, \\ &(\Sigma M_O = 0) \quad -TR + F_m R = 0\,. \end{aligned} \quad (4.12)$$

(S-au scris numai două ecuaţii de echilibru deoarece sistemul forţelor care acţionează scripetele este un sistem de forţe paralele coplanare).

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$F_m = T = \frac{F_r}{2}\,. \quad (4.13)$$

În realitate, dacă se ţine seama de frecările din axul scripetelui şi rigiditatea cablului, cea de-a doua ecuaţie a sistemului (4.12) se înlocuieşte cu :

$$F_m = kT, \quad (4.14)$$

rezultat care introdus în prima ecuaţie a aceluiaşi sistem conduce la:

$$T=\frac{F_r}{1+k};$$

deci:

$$F_m=kT=\frac{k}{1+k}F_r=k_1F_r. \qquad (4.15)$$

Se poate arăta că $k_1>\frac{1}{2}$ adică forţa motoare în cazul cu frecări este mai mare decît în cazul fără frecări.

c) **Sisteme de scripeţi.** Pentru a beneficia atît de avantajul reducerii forţei rezistente oferit de scripetele mobil cît şi de avantajul schimbării sensului acestei forţe, se folosesc combinaţii de scripeţi ficşi şi mobili, denumite *sistem de scripeţi*. Ele au aplicaţii în industria petrolieră, în industria construcţiilor, la tot felul de maşini de ridicat şi transportat (macarale, graifăre ect.).

Un sistem de n scripeţi mobili şi un scripete fix, dispuşi ca în figura 4.7 poartă denumirea de *palan* (în cazul figurii $n=3$).

Pentru a determina relaţia dintre forţa motoare şi forţa rezistentă, izolăm scripeţii şi scriem următoarele ecuaţii:

— proiecţii pe verticală pentru fiecare scripete mobil:

$$T_5+T_6=T_4;$$
$$T_4+T_4=T_2 \qquad (4.16)$$
$$T_2+T_1=T_r$$

— ecuaţii de momente în raport cu centrele scripeţilor (pentru fiecare scripete forţa din dreapta este forţa motoare, iar forţa din stînga este forţa rezistentă):

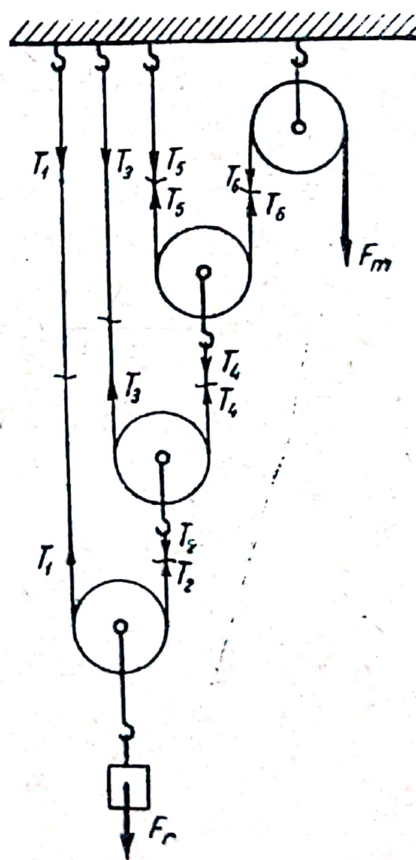


Fig. 4.7.

$$F_m=kT_6$$
$$T_6=kT_5 \qquad (4.17)$$
$$T_4=kT_3$$
$$T_2=kT_1.$$

(Am admis acelaşi k pentru toţi scripeţii.)

Înlocuind ultimele trei relaţii ale sistemului (4.17) în ecuaţiile (4.16) obţinem :

$$\begin{aligned} T_5(1+k) &= T_4 \\ T_3(1+k) &= T_2 \\ T_1(1+k) &= F_r . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului (4.17) şi prima ecuaţie a sistemului (4.18) deducem :

$$F_m = kT_6 = k^2T_5 = \frac{k^2}{1+k} T_4 .$$

Ţinînd seama de cea de-a treia ecuaţie a sistemului (4.17) şi de cea de-a doua ecuaţie a sistemului (4.18), deducem :

$$F_m = \frac{k^2}{1+k} T_4 = \frac{k^3}{1+k} T_3 = \frac{k^3}{(1+k)^2} T_2 .$$

În fine, ţinînd seama de ultimele două ecuaţii ale ambelor sisteme, deducem :

$$F_m = \frac{k^3}{(1+k)^2} T_2 = \frac{k^4}{(1+k)^2} T_1 = \frac{k^4}{(1+k)^3} F_r = kF_r .$$

Pentru un număr oarecare n de scripeţi vom avea :

$$F_m = \frac{k^{n+1}}{(1+k)^n} F_r . \tag{4.19}$$

Pentru cazul fără frecări ($k = 1$), obţinem :

$$F_m = \frac{1}{2^n} F_r . \tag{4.20}$$

Coeficientul de reducere al forţei rezistente depinde de numărul n al scripeţilor mobili, care apare la exponentul lui 2, fapt pentru care acest sistem de scripeţi mai este denumit şi *palan exponenţial*. În practică, se întîlnesc sisteme de scripeţi foarte diverse ; în figura 4.8 sînt arătate cîteva asemenea sisteme denumite : palan (fig. 4.8, *a*), macara diferenţială (fig. 4.8, *b*), troliu diferenţial (fig. 4.8, *c*). Pentru oricare sistem de

scripeţi, modul de determinare a coeficientului k de reducere a forţei rezistente se face în acelaşi mod ca cel din exemplul de mai sus.

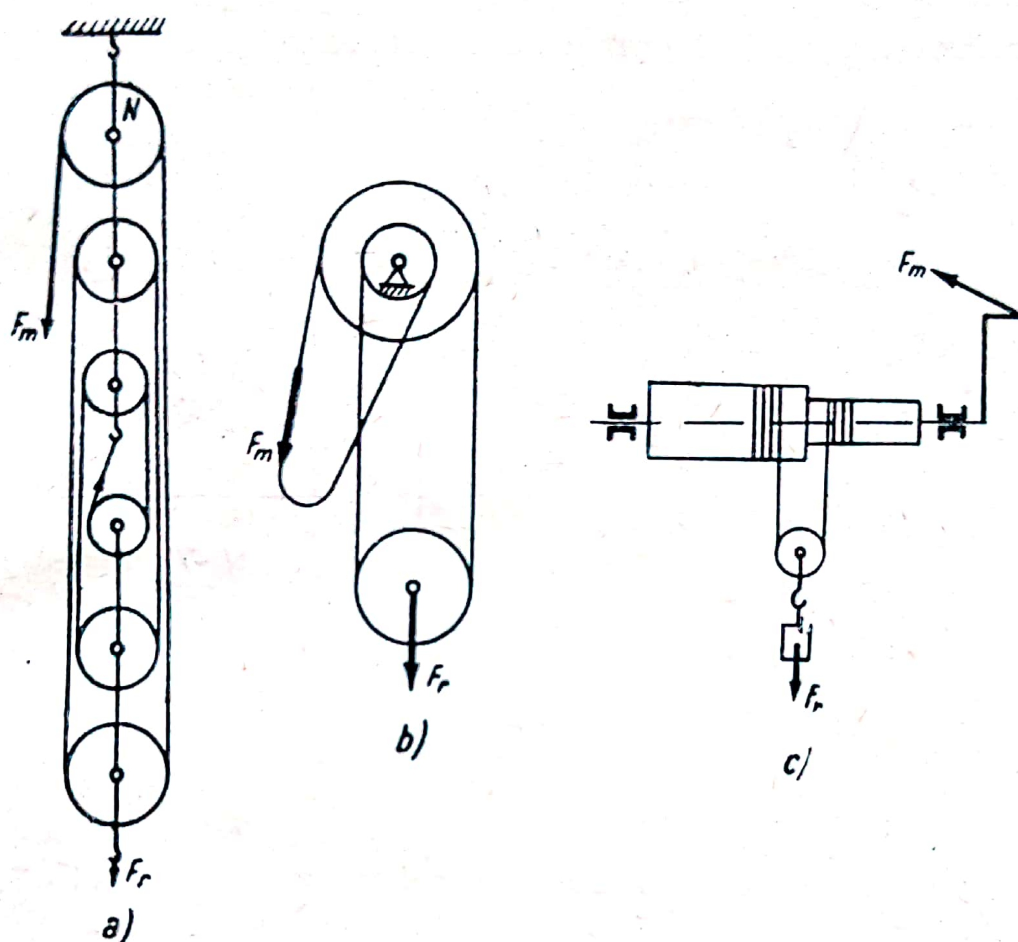


Fig. 4.8.

4. Pana

Pana este corp de formă prismatică, avînd una sau două feţe opuse înclinate; ea serveşte pentru îmbinarea a două organe de maşini, ca de exemplu tija pistonului cu capul de cruce, o roată cu un arbore etc.

În secţiune transversală, pana are forma unui trapez isoscel sau dreptunghic. Unghiul format de laturile neparalele ale trapezului este denumit *unghiul penei*.

Pana se montează în general prin batere cu ciocanul. Forţa motoare care înfige pana în locaşul ei trebuie să învingă rezistenţele opuse de corpul în care ea este introdusă, şi anume

reacţunile normale N_1 şi N_2 şi forţele de frecare T_1 şi T_2 (fig. 4.9, *a*).

Vom considera că pana apasă uniform pe toată suprafaţa de contact cu corpul în care este introdusă; în acest caz, rezultantele reacţiunilor normale din punctele de contact (N_1 şi

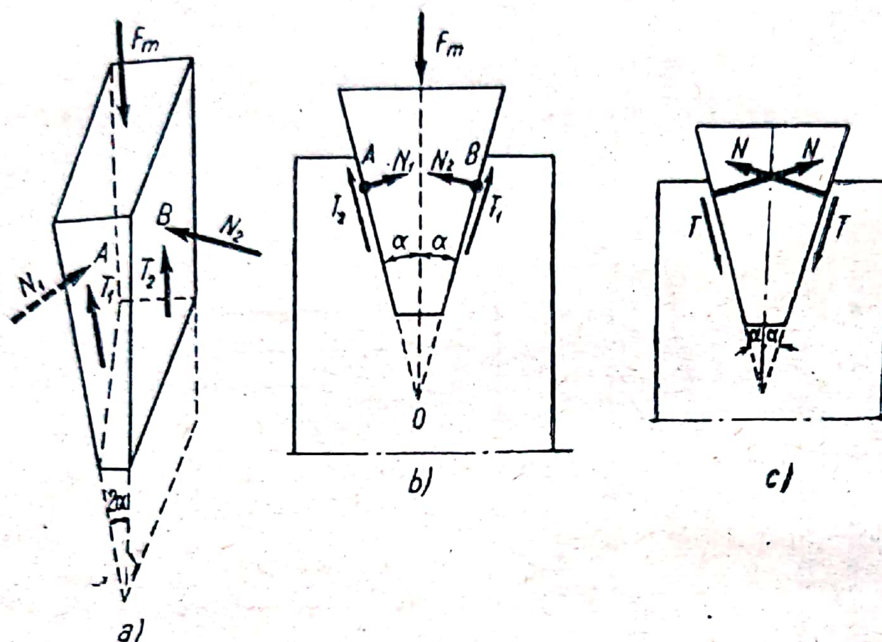


Fig. 4.9.

N_2) şi rezultantele T_1 şi T_2 ale forţelor de frecare se află în planul transversal de simetrie al penei împreună cu F_m; forţele care acţionează pana formează deci un sistem de forţe coplanare (fig. 4.9, *b*). Ecuaţiile de echilibru sînt:

$$
\begin{aligned}
(\Sigma F_x=0) \quad & N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha - T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha = 0, \\
(\Sigma F_y=0) \quad & -F_m + N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha + T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha = 0, \qquad (4.21) \\
(\Sigma M_o=0) \quad & N_2 \cdot Ob - N_1 \cdot OA = 0.
\end{aligned}
$$

Dacă considerăm că din cazul simetriei punctele A şi B se află la aceeaşi distanţă de $O (OA = OB)$, avem:

$$N_1 = N_2 = N. \qquad (4.22)$$

Forţele de frecare la limită au valorile:

$$
\begin{aligned}
T_1 = \mu N_1; \quad T_2 = \mu N_2, \\
T_1 = T_2 = T = \mu N.
\end{aligned}
\qquad (4.23)
$$

Înlocuind în ecuaţiile (4.21) obţinem:

$$F_m = 2(\sin\alpha + \mu \cos\alpha) N = 2\ kN. \qquad (4.24)$$

În general $k<1$; pana se fixează cu atît mai ușor cu cît α și μ sînt mai mici.

Să considerăm echilibrul penei după ce a fost introdusă în locașul său ; în acest caz, forța motoare F_m dispare, iar forțele de frecare își schimbă sensul, ca în figura 4.9, *c*, pentru a menține pana în locașul său.

Pentru ca pana să nu fie expulzată din locaș după dispariția forței motoare F_m, trebuie ca suma proiecțiilor pe axa penei a forțelor care rețin pana în locaș (forțele de frecare) să fie mai mare decît proiecțiile forțelor care caută să expulzeze pana (forțele N), adică :

$$2T \cos \alpha > 2N \sin \alpha ;$$

ținînd seama de relația $T = \mu N = N \operatorname{tg} \varphi$ rezultă :

$$\alpha < \varphi, \tag{4.25}$$

unde φ este unghiul de frecare. Aceasta este așa-numita *condiție de autofixare a penei.*

5. Grinzi cu zăbrele

Grinzile cu zăbrele sînt sisteme de bare articulate la extremități, care au o largă răspîndire în construcțiile metalice (ferme, susțineri de rezervoare, macarale, poduri ș.a.).

La studiul echilibrului grinzilor cu zăbrele se fac o serie de ipoteze simplificatoare în raport cu situația cunoscută din practică. Astfel, deși în practică grinzile cu zăbrele sînt construite nituind sau sudînd barele la extremități cu ajutorul unor plăci denumite *gusee*, în mecanică ele sînt considerate ca fiind articulate la extremități, iar aceste articulații se consideră fără frecări. O altă ipoteză simplificatoare este aceea că barele n-au greutate (greutatea barei este neglijabilă în raport cu sarcinile transmise sau se împarte în mod egal la cele două extremități ale sale), precum și faptul că sarcinile exterioare sînt transmise barelor numai la noduri (articulații).

Datorită acestor ipoteze, rezultă că barele unei grinzi cu zăbrele sînt acționate numai la extremități ; pentru ca ele să rămînă în echilibru, trebuie ca forțele care le acționează să fie îndreptate după direcția barei, fie către interiorul său (caz în care se zice că bara este comprimată), fie către exteriorul ei (caz în care se zice că bara este întinsă). Este evident că o bară

întinsă trage de nodul în care este prinsă, iar o bară comprimată apasă asupra nodului.

Problemele care se pun în cazul grinzilor cu zăbrele sînt :

— determinarea reacţiunilor din legăturile exterioare ale grinzii ;

— determinarea eforturilor care iau naştere în barele grinzii.

Despre poziţia de echilibru nu se poate vorbi, deoarece dacă legăturile exterioare imobilizează sistemul de bare el nu poate ocupa mai multe poziţii.

Prima problemă se rezolvă la fel ca în cazul oricărui alt corp ; se înlocuiesc legăturile exterioare prin reacţiuni şi se scriu ecuaţiile de echilibru din care se determină aceste reacţiuni.

Pentru rezolvarea celei de-a doua probleme se folosesc în practică două metode, şi anume : *metoda izolării nodurilor şi metoda secţiunilor*, care vor fi descrise în cele ce urmează.

Ambele aceste metode au la bază principiul echilibrului părţilor, care afirmă că dacă un sistem de corpuri se află în echilibru, atunci şi diferitele părţi ale acestui sistem se află de asemenea în echilibru.

Prima metodă consideră drept părţi ale sistemului de bare nodurile sale, iar cea de-a doua consideră drept părţi două jumătăţi ale sistemului de bare, obţinute prin secţionarea grinzii cu zăbrele.

a) **Metoda izolării nodurilor.** Să izolăm fiecare nod al grinzii cu zăbrele ; vom obţine o serie de puncte care se află sub acţiunea unui sistem de forţe concurente şi al căror echilibru este realizat dacă sînt satisfăcute cele două ecuaţii de proiecţie pentru forţele concurente şi coplanare.

Dacă aranjăm astfel încît în fiecare sistem de cîte două asemenea ecuaţii să nu existe decît maximum două necunoscute, izolînd nod cu nod, vom determina din aproape în aproape toate forţele care acţionează nodurile, deci toate eforturile din bare. Eforturile din bare le vom considera totdeauna pozitive, plecînd de la noduri ; dacă valorile lor rezultă pozitive din ecuaţiile de echilibru, ele sînt tensiuni pentru barele respective ; în caz contrar, ele sînt compresiuni.

b) **Metoda secţiunilor.** Să tăiem grinda cu zăbrele în două părţi, astfel încît tăietura făcută să secţioneze maximum trei bare care nu pleacă din acelaşi nod (nu sînt concurente). Scriind cele trei ecuaţii de echilibru pentru forţele coplanare vom determina tensiunile din barele tăiate.

Dacă în locul ecuaţiilor obişnuite de proiecţii şi de momente vom scrie numai ecuaţii de momente în raport cu punctele de intersecţie ale tensiunilor necunoscute luate două cîte două, vom avea în fiecare ecuaţie numai cîte o necunoscută; în cazul cînd două tensiuni sînt paralele, pentru a obţine o ecuaţie care conţine numai cea de-a treia tensiune, vom scrie ecuaţia de proiecţii pe perpendiculara comună.

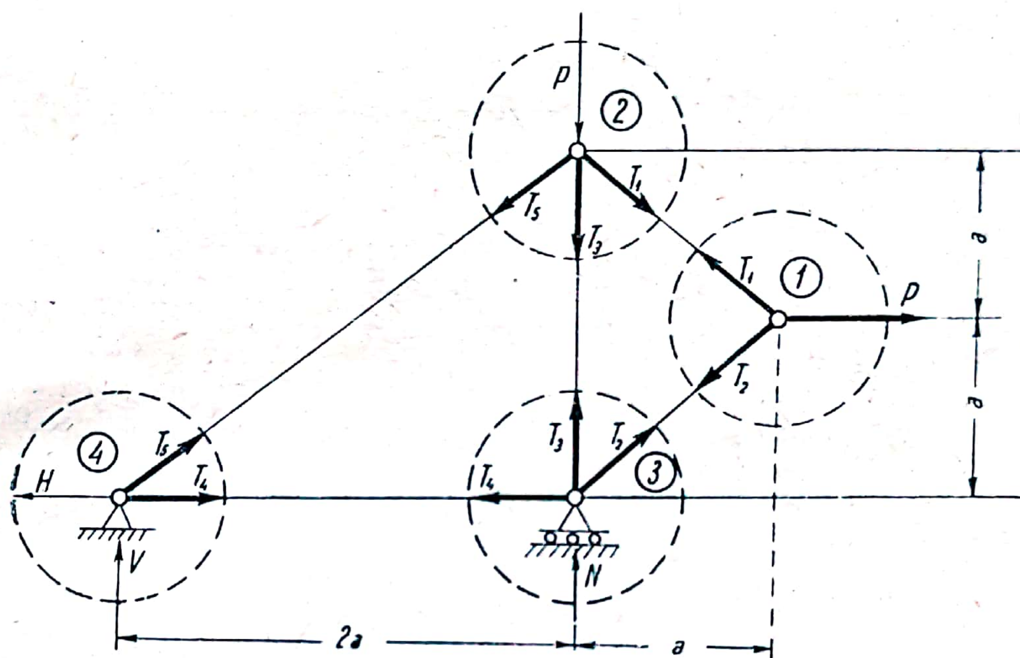


Fig. 4.10.

Această metodă este mai practică decît metoda izolării nodurilor, deoarece cu ajutorul ei putem determina direct efortul într-o anumită bară a grinzii fără a scrie echilibrul fiecărui nod.

Exemple

1. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele din figura 4.10.

Scriind ecuaţiile de echilibru ale nodurilor avem:

Nodul 1.

$$(\Sigma F_x=0) \qquad P-T_1 \cos 45°-T_2 \cos 45°=0,$$

$$(\Sigma F_y=0) \qquad T_1 \sin 45°-T_2 \sin 45°=0.$$

Din acest sistem de ecuaţii rezultă:

$$T_1=T_2=\frac{P\sqrt{2}}{2}.$$

Nodul 2.

$$(\Sigma F_x=0) \qquad -T_5 \cos 45° + T_1 \cos 45° = 0$$
$$(\Sigma F_y=0) \qquad -P - T_3 - T_1 \sin 45° - T_5 \sin 45° = 0.$$

Rezultă :
$$T_5 = \frac{P\sqrt{2}}{2}, \quad T_3 = -2P.$$

Nodul 3.

$$(\Sigma F_x=0) \qquad -T_4 + T_2 \cos 45° = 0$$
$$(\Sigma F_y=0) \qquad T_3 + N + T_2 \cos 45° = 0.$$

Rezultă :
$$T_4 = \frac{P}{2}, \qquad N = \frac{3P}{2}.$$

Nodul 4.

$$(\Sigma F_x=0) \qquad T_5 \cos 45° + T_4 - H = 0$$
$$(\Sigma F_y=0) \qquad V + T_5 \sin 45° = 0.$$

Rezultă :
$$H = P, \; V = \frac{-P}{2}.$$

Observație. În cazul acestei probleme nu a fost nevoie să scriem ecuațiile de echilibru exterior ale grinzii pentru a

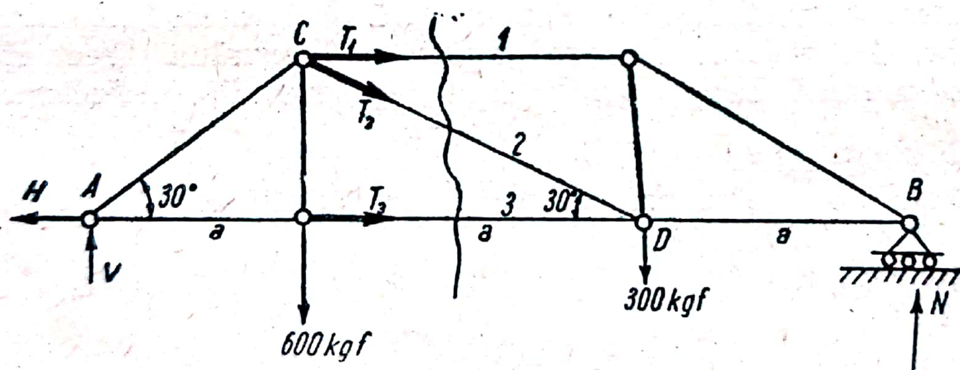


Fig. 4.11.

afla reacțiunile legăturilor ; ele au rezultat din ecuațiile de echilibru ale nodurilor. Ecuațiile de echilibru exterior pot fi scrise pentru verificare.

2. Să se determine eforturile interioare în barele 1, 2 și 3 ale grinzii din figura 4.11.

Se află mai întîi reacțiunile scriind echilibrul întregii grinzi :

$$(\Sigma F_x = 0) \qquad H = 0,$$
$$(\Sigma F_y = 0) \qquad V + N - 600 - 300 = 0,$$
$$(\Sigma M_A = 0) \qquad 600a + 300 \times 2a - N \times 3a = 0,$$

din care rezultă :

$$H = 0, \quad N = 400 \quad \text{kgf}, \quad V = 500 \quad \text{kgf}.$$

Se face apoi o secțiune ca în figura 4.11 ; se aplică metoda secțiunilor :

$$(\Sigma M_C = 0) \qquad T_3 a \operatorname{tg} 30° - Va = 0,$$
$$(\Sigma M_D = 0) \qquad T_1 a \operatorname{tg} 30° + V \times 2a - 600a = 0,$$
$$(\Sigma F_y = 0) \qquad V - 600 - T_2 \sin 30° = 0.$$

Rezultă din fiecare ecuație :

$$T_1 = -400\sqrt{3} = -692 \text{ kgf (compresiune)},$$
$$T_2 = -200 \text{ kgf (compresiune)},$$
$$T_3 = \quad 500\sqrt{3} = 865 \text{ kgf (tensiune)}.$$

Partea a III-a

CINEMATICA SISTEMELOR MATERIALE

Capitolul V

PROBLEME GENERALE; NOŢIUNI INTRODUCTIVE ÎN CINEMATICĂ

1. Obiectul cinematicii

Cinematica este acea parte a mecanicii care studiază mişcarea mecanică a sistemelor materiale fără a ţine seama de masele acestor sisteme şi de forţele care le acţionează. Astfel, în cinematică se studiază mişcarea pistonului unui motor fără a ţine seama de masa lui sau de forţa gazelor din cilindru care îl acţionează; tot în cinematică se mai studiază şi mişcarea unei oale de turnătorie transportată de o macara, de asemenea fără a se ţine seama de masa ei sau de forţele care o acţionează (forţa din cablul de susţinere şi greutatea sa). Rezultă deci că cinematica studiază numai *latura geometrică* a mişcării mecanice, motiv pentru care ea a mai fost denumită în trecut şi *geometria mecanicii*.

2. Subîmpărţirile cinematicii

Studiul mişcării sistemelor mecanice se face avînd în vedere două mari criterii:

— caracterul sistemului de referinţă la care se raportează mişcarea (sistem fix sau mobil);

— felul sistemului material a cărui mişcare se studiază (punct material, solid rigid sau sistem de solide rigide).

În cele ce urmează se va studia mai întîi mişcarea celor trei sisteme materiale cunoscute (punct material, solid rigid,

sistem de solide rigide) față de un reper fix și apoi mișcarea acelorași sisteme materiale față de un reper mobil.

Noțiunile de reper fix și reper mobil vor fi prezentate pe larg mai jos.

3. Scurt istoric

Cel dintîi care a studiat mai aprofundat mișcarea corpurilor a fost Aristotel, care înțelegea prin mișcare atît schimbarea poziției corpurilor în spațiu unele față de altele, cît și schimbările chimice și fizice ale acestora. Dintre savanții antichității trebuie remarcat și Arhimede, care cu ocazia lucrărilor sale asupra pîrghiei a studiat îndeosebi mișcarea pe cerc.

La dezvoltarea cinematicii au mai contribuit și : Leonardo da Vinci, N. Copernic, Galileo Galilei, René Descartes, G. de Roberval, Huygens, Isaac Newton, d'Alembert, L. Euler, J.Lagrange, N. E. Jukovski, A. Krîlov, Sofia Kovalevskaia și alții.

4. Importanța tehnică a cinematicii

Cinematica joacă un rol foarte mare în studiul construcției și funcționării diferitelor mecanisme și mașini utilizate în tehnică ; cunoașterea caracteristicilor cinematice ale organelor de mașini în timpul funcționării lor joacă un rol deosebit la proiectarea și exploatarea lor, precum și la crearea de mașini noi, la îmbunătățirea și inventarea a noi mașini și dispozitive care să contribuie la executarea de operații tehnologice din ce în ce mai complexe, la automatizarea proceselor tehnologice.

Din acest motiv, aplicațiile tehnice ale cinematicii au luat în ultimele decenii o dezvoltare foarte mare, conducînd chiar la apariția unei noi discipline, cunoscută sub denumirea de cinematica mecanismelor și a mașinilor, disciplină în care se studiază mișcările și construcția mecanismelor întîlnite în uzine, în mașinile de transport etc.

5. Noțiunile de bază ale cinematicii ; unități de măsură

Noțiunile fundamentale ale cinematicii sînt *spațiul* și *timpul* ; se presupune că există o unitate pentru măsurarea lungimilor, care, în condiții fizice neschimbate (aceeași temperatură, aceeași presiune etc.), păstrează o valoare independentă atît

de locul unde se face măsurătoarea cît şi de starea cinematică (repaus sau mişcare) a obiectului măsurat. Aceasta înseamnă că, măsurînd acelaşi obiect în momente diferite şi în locuri diferite, vom obţine acelaşi rezultat dacă condiţiile fizice arătate nu sînt diferite.

O altă presupunere care se face în cinematică este aceea că există un acelaşi timp pentru întreg spaţiul, denumit *timp absolut*. Aceasta înseamnă că valoarea timpului nu depinde de faptul că un corp se află în repaus sau în mişcare sau de faptul că măsurarea timpului se efectuează faţă de un sistem de referinţă fix sau mobil.

Simultaneitatea poziţiilor ocupate de un sistem material în spaţiu (sau a două fenomene mecanice oarecare) corespunde valorilor identice ale timpului, iar succesiunea lor corespunde valorilor diferite ale timpului; se zice că un fenomen precede un alt fenomen dacă valoarea timpului corespunzătoare primului fenomen este mai mică decît cea corespunzătoare celui de-al doilea fenomen; în caz contrar se zice că primul fenomen succede celui de-al doilea.

Măsurarea timpului se efectuează faţă de o origine a timpurilor aleasă arbitrar. Durata unui anumit fenomen este reprezentată de intervalul de timp corespunzător timpului la care el începe şi celui la care sfîrşeşte; ea este egală cu diferenţa celor două valori ale timpului corespunzătoare începutului şi sfîrşitului fenomenului considerat.

6. Sisteme de referinţă; mişcare absolută şi relativă

Schimbarea poziţiei unui corp material în timp nu poate fi reperată decît faţă de alte corpuri materiale, care formează aşa-numitele *sisteme de referinţă*.

În cinematică se presupune că există un sistem de referinţă imobil undeva în spaţiu, denumit *sistemul de referinţă absolut* sau *reperul absolut*. Orice alt sistem de referinţă care este solidar cu reperul absolut sau fix în raport cu acesta este considerat de asemenea un sistem de referinţă fix.

Orice sistem de referinţă care nu este fix în raport cu reperul absolut este denumit în cinematică *sistem de referinţă mobil*. Mişcarea unui anumit corp material raportată la un sistem de referinţă fix este denumită în cinematică *mişcare absolută*; mişcarea unui corp material raportată la un sistem de referinţă mobil este denumită *mişcare relativă*.

La studiul mişcării diferitelor organe ale unei maşini, sistemul de referinţă fix este constituit în general de către batiul maşinii respective, drept sisteme de referinţă mobile putînd fi alese oricare dintre organele componente ale aceleiaşi maşini.

Astfel, la un strung poate fi ales drept sistem mobil sania care poartă cuţitul, la o macara poate fi ales drept sistem mobil pisica ce se deplasează pe macara etc.

În tehnică prezintă o importanţă deosebită atît studiul mişcării absolute cît şi cel al mişcării relative; cu ajutorul mişcării absolute şi al celei relative se studiază modul în care se transmit mişcarea şi forţele de la elementul conducător la cel condus, iar cu ajutorul mişcării relative se studiază poziţiile şi mişcarea pe care o au între ele diferitele elemente ale unei maşini, precum şi vitezele şi acceleraţiile lor relative care servesc mai departe la studiul şocurilor, al uzurii etc.

7. Poziţie; mişcare, repaus

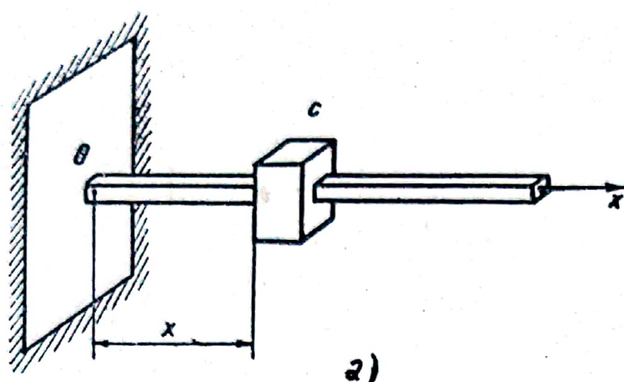
Vom înţelege prin poziţia unui sistem material la un moment dat *locul* pe care acesta îl ocupă în spaţiu la momentul considerat. Poziţia unui sistem material se determină faţă de un sistem de referinţă cu ajutorul unor mărimi geometrice care pot fi independente între ele sau nu.

Vom spune că poziţia ocupată de sistemul material considerat este *fixă* faţă de un anumit sistem de referinţă sau că sistemul material respectiv se află în repaus faţă de acelaşi sistem de referinţă dacă mărimile geometrice care o caracterizează (unghiuri şi distanţe) au valori constante.

Vom spune că poziţia ocupată de sistemul material considerat este *variabilă* faţă de un sistem de referinţă sau că sistemul material respectiv se află în mişcare faţă de acelaşi sistem de referinţă dacă cel puţin unul din parametrii geometrici care o caracterizează este funcţie de timp.

Ca exemplu să ne imaginăm un cursor C de formă paralelipipedică, care se poate deplasa în lungul unei bare fixe Ox avînd de asemenea o formă paralelipipedică (fig. 5.1, *a*); cursorul este prevăzut cu un canal fără joc, care-i permite deplasarea în lungul barei. Poziţia cursorului pe bară este determinată cu ajutorul unei singure mărimi geometrice: distanţa x. Dacă această distanţă are o valoare constantă (spre exemplu $x = 0{,}5$m), cursorul ocupă o poziţie fixă faţă de bară, adică se află în repaus faţă de bară; dacă distanţa x este funcţie de timp

spre exemplu $x = 2t^3 + 1$(x în metri, t în secunde), el ocupă o poziţie variabilă faţă de bară, adică se află în mişcare faţă de bară. Într-adevăr, poziţiile ocupate de cursor o dată cu trecerea timpului sînt cele arătate în tabela 5.1. (fig. 5.1, *b*).



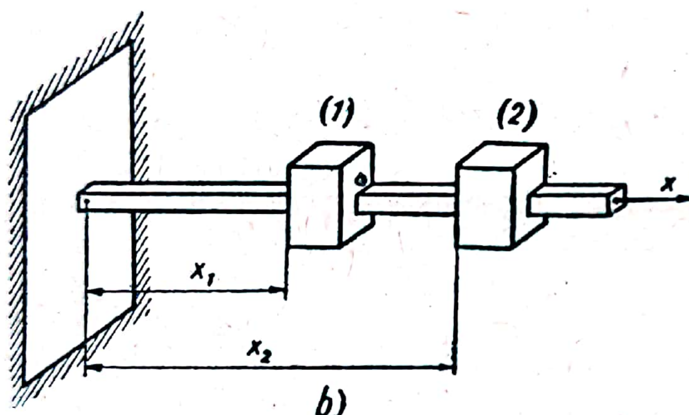


Fig. 5.1.

Valorile lui x se determină introducînd valorile variabilei t în funcţia $x = 2t^3 + 1$ (se presupune că bara este suficient de lungă încît cursorul că nu-i depăşească extremitatea liberă).

Să considerăm acum două poziţii oarecare ale unui sistem material; ele sînt caracterizate prin două sisteme de valori distincte, particulare, ale parametrilor geometrici care-i determină poziţia sa. Astfel, în cazul cursorului din figura 5.1, *b* două poziţii oarecare sînt caracterizate de exemplu prin valorile $x_1 = 1{,}5$ şi $x_2 = 3$. Vom denumi prin convenţie una dintre poziţii *poziţia iniţială (1)*, iar cealaltă *poziţie finală* (2). Dacă parametrii geometrici care determină poziţia sistemului material sînt funcţii de timp, vom considera în general drept poziţie finală pe aceea care corespunde unei valori a timpului mai mare în raport cu cea corespunzătoare poziţiei iniţiale.

Tabela 5.1

Poziţiile ocupate de cursor în timp

Valoarea lui t	Distanţa x la care se află cursorul de punctul o
$t_0 = 0$	$x_0 = 1$
$t_1 = 1$	$x_1 = 3$
$t_2 = 2$	$x_2 = 17$

8. Deplasare

După cum am văzut, un sistem material poate ocupa în spaţiu mai multe poziţii la momente diferite. *Operaţia prin care un anumit sistem material este adus dintr-o poziţie în alta se numeşte deplasare.* Un sistem material ocupă deci în timpul unei deplasări cel puţin două poziţii, caracterizate prin valori distincte ale parametrilor geometrici care-i stabilesc poziţia în spaţiu. Dacă valorile tuturor mărimilor geometrice corespunzătoare la două poziţii ocupate de sistemul material diferă între ele prin cantităţi finite, deplasarea corespunzătoare se numeşte *finită*; dacă însă valorile tuturor mărimilor geometrice care caracterizează poziţia sistemului material diferă între ele prin cantităţi foarte mici, infinitezimale, deplasarea corespunzătoare se numeşte *infinitezimală*.

9. Traiectorie

În timpul efectuării unei deplasări dintr-o poziţie în alta, punctele unui sistem material lasă în spaţiu o serie de ,,urme''; dacă le-am putea materializa într-un fel oarecare, am constata că ele sînt nişte curbe avînd uneori forme simple, alteori forme complicate. În cinematică, aceste ,,urme'' poartă denumirea de *traiectorii*. Vom înţelege deci prin traiectorie *locul geometric al poziţiilor succesive ocupate în spaţiu de un punct material aparţinînd unui sistem care execută o deplasare faţă de un anumit sistem de referinţă.*

10. Viteză

Să considerăm un sistem material a cărui poziţie în spaţiu este caracterizată faţă de un sistem de referinţă printr-un număr oarecare de parametri geometrici (distanţe sau unghiuri); să presupunem că acest sistem material se află în mişcare. În acest caz, cel puţin una dintre mărimile geometrice care-i caracterizează poziţia va fi o funcţie de timp. Să alegem un unghi sau o distanţă pe care să o notăm cu simbolul q. Vom avea deci:

$$q = f(t). \tag{5.1}$$

Să considerăm două valori distincte ale unghiului sau distanței $q(q_1$ și $q_2)$, corespunzătoare la două valori ale timpului $t(t_1$ și $t_2)$:

$$q_1 = f(t_1),$$
$$q_2 = f(t_2).$$

Prin definiție, vom denumi *variație* a mărimii q diferența $q_2 - q_1$, și *viteză medie* raportul dintre variația mărimii q și intervalul de timp corespunzător acestei variații ; aceasta se scrie :

$$v_m = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} . \qquad (5.2)$$

Trebuie remarcat că viteza medie este variabilă de la un interval de timp la altul, chiar dacă intervalele de timp sînt alese egale între ele. Astfel, pentru exemplul din figura 5.1, vitezele medii pe diferitele intervale de timp au valorile :

pentru intervalul de timp $t_0 = 0$, $t_1 = 1$: $v_m = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{3 - 1}{1 - 0} =$
$= 2$ m/s,

pentru intervalul de timp $t_1 = 1$, $t_2 = 2$: $v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{17 - 3}{2 - 1} =$
$= 14$ m/s,

pentru intervalul de timp $t_0 = 2$, $t_0 = 0$: $v_m = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{17 - 1}{2 - 0} =$
$= 8$ m/s.

Este ușor de observat că *viteza medie a unui sistem material depinde de perechea de poziții considerată pentru sistemul respectiv*. Totodată, constatăm că ea ne dă o idee destul de vagă despre mișcarea sistemului respectiv, întrucît ea depinde de intervalul de timp sau de distanța dintre cele două poziții considerate ; cu cît aceste intervale sînt mai mari, cu atît cunoștințele noastre despre modul în care se desfășoară în timp deplasarea sistemului respectiv între cele două poziții sînt mai „globale", mai aproximative. De aceea, pentru a obține o precizie mai mare în aprecierea deplasării unui sistem material între două poziții vom restrînge foarte mult intervalul de timp considerat. În acest fel, apare o altă noțiune importantă în cinematică, și anume aceea de *viteză instantanee* sau *viteză momentană* în momentul t ; ea este definită ca limita vitezei medii

atunci cînd intervalul de timp la care se raportează variația lui q este foarte mic, adică atunci cînd diferența $t_1 - t$ tinde către zero sau, ceea ce este tot una, cînd t_1 tinde către t :

$$v = \lim_{t_1 \to t} \frac{q_1 - q}{t_1 - t} .$$

Dacă notăm diferența valorilor parametrului $q_1 = q(t_1)$ și $q = q(t)$ prin $\Delta q (\Delta q = q_1 - q)$ și intervalul de timp prin $\Delta t (\Delta t = t_1 - t)$, expresia vitezei se mai scrie :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'. \quad (5.3)$$

Sub această formă observăm că *viteza instantanee sau momentană este derivata lui q în raport cu variabila t.*

Dacă mărimea care variază este o lungime, viteza corespunzătoare se numește *viteză liniară* sau simplu *viteză* ; dacă mărimea care variază este un unghi, viteza corespunzătoare se numește *viteza unghiulară.*

Prima se măsoară în :

$$\frac{\text{unități de lungime}}{\text{unități de timp}}$$

adică m/s, km/h etc., iar cea de-a doua în :

$$\frac{\text{unități de unghi}}{\text{unități de timp}}$$

adică în rad/s.

În cazul exemplului de mai sus, viteza cursorului la un moment dat t este :

$$v = x' = 6t^2.$$

Valorile vitezei v, în m/s, la diferite momente t sînt trecute în tabela 5.2.

Aceste valori au fost determinate introducînd în expresia vitezei valorile corespunzătoare ale lui t trecute în coloana din stînga a tabelei.

În cele de pînă aci a fost definită noțiunea de viteză

Tabela 5.2

Valorile vitezei cursorului în timp.

Valoarea lui t	Viteza cursorului
$t_0 = 0$	$v_0 = 0$
$t_1 = 1$	$v_1 = 6$
$t_2 = 2$	$v_2 = 24$

Br. 2–110

pentru fenomenele care formează obiectul de studiu al mecanicii : deplasarea corpurilor în spaţiu unele faţă de altele. Noţiunea de viteză are însă o utilizare mult mai largă, atît în alte domenii ale ştiinţelor naturii cît şi în tehnică, unde ea este folosită pentru a caracteriza modul de desfăşurare în timp a diferitelor fenomene materiale. Vom întîlni astfel *viteza de scurgere* a unui fluid (în hidraulică, aerodinamică, termodinamică), *viteza de deformare* a unui material, viteza de fluaj (în rezistenţa materialelor), *viteza de depunere* a unei substanţe, *viteza de concentrare* a unei soluţii (în chimie), *viteza de ardere* a unui combustibil (în termotehnică) ş.a.m.d.

În legătură cu noţiunea de viteză se întîlnesc în tehnică o serie de denumiri ale unor organe de maşini, mecanisme şi aparate de măsură de mare însemnătate pentru activitatea practică ; cîteva dintre ele sînt : *schimbător de viteză, cutie de viteze* (mecanisme servind la varierea vitezei, întrebuinţate în construcţia vehiculelor, maşinilor-unelte, maşinilor de ridicat şi transportat etc.), *vitezometru* (aparat pentru măsurarea vitezei diferitelor organe mobile ale maşinilor ş.a.).

11. Acceleraţie

Să considerăm din nou acelaşi sistem material, precum şi una dintre mărimile geometrice — unghi sau distanţă-funcţie de timp, care-i stabilesc poziţia în spaţiu $q = q(t)$. Să presupunem că vitezele corespunzătoare la două poziţii ale sistemului material pentru o variaţie a parametrului q sînt :

— la timpul t_1 : $v_1 = q'(t_1)$,
— la timpul t_2 : $v_2 = q'(t_2)$.

Prin definiţie vom denumi *acceleraţie medie* a sistemului material pentru variaţia lui q raportul dintre variaţia vitezelor lui q şi intervalul de timp corespunzător acestei variaţii :

$$a_m = \frac{q'(t_2) - q'(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{5.4}$$

Şi în acest caz sînt valabile aceleaşi observaţii ca în cazul vitezei medii ; acceleraţia medie este variabilă de la un interval de timp la altul, chiar dacă intervalele de timp sînt alese egale

între ele. Astfel, pentru exemplul din figura 5.1 accelerațiile medii pe diferitele intervale au valorile:
— pentru intervalul de timp $t_0 = 0$,

$$t_1=1 : a_m = \frac{q'(1) - q'(0)}{t_1 - t_2} = \frac{6-0}{1-0} = 6 \text{ m/s}^2,$$

— pentru intervalul de timp $t_1 = 1$,

$$t_2=2 : a_m = \frac{q'(2) - q'(1)}{t_2 - t_1} = \frac{24-6}{1-0} = 18 \text{ m/s}^2,$$

— pentru intervalul de timp $t_2 = 2$,

$$t_0=0 : a_m = \frac{q'(3) - q'(2)}{t_2 - t_0} = \frac{24-0}{2-0} = 12 \text{ m/s}^2.$$

Din aceleași considerente expuse în cazul vitezei medii, accelerația medie nu ne oferă o posibilitate suficient de exactă pentru a aprecia modul în care variază viteza unui anumit sistem material datorită variației uneia dintre mărimile geometrice care-i caracterizează poziția față de un sistem de referință.

De aceea, în cinematică se folosește o noțiune care oferă posibilitatea unei aprecieri mult mai exacte a mișcării denumită *accelerație instantanee* sau *accelerație momentană* la un anumit moment t. Ea este definită ca limita accelerației medii atunci cînd intervalul de timp la care se raportează variația vitezei q este foarte mic, adică atunci cînd diferența $t_1 - t$ tinde către zero sau, ceea ce este tot una, cînd t_1 tinde către t:

$$a = \lim_{t_1 \to t} \frac{q'_1 - q'}{t_1 - t}.$$

Dacă vom nota acum:

$$q'_1 - q' = \Delta q',$$

$$t_1 - t = \Delta t,$$

expresia accelerației devine:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q'}{\Delta t} = q''. \qquad (5.5)$$

[1]

Rezultă deci că accelerația instantanee sau momentană este cea de-a doua derivată a lui q în raport cu variabila t.

---

[1] Derivatele în raport cu timpul le vom nota în cele ce urmează cu un punct deasupra.

$$q' \equiv \dot{q} \qquad q'' \equiv \ddot{q}.$$

Dacă parametrul care variază este o distanță, accelerația corespunzătoare se numește *accelerație liniară* sau simplu *accelerație*; dacă parametrul care variază este un unghi, accelerația corespunzătoare se numește *accelerație unghiulară*.

Accelerația liniară se măsoară în

$$\frac{\text{unități de viteză liniară}}{\text{unități de timp}},$$

adică m/s^2 sau km/s^2, iar accelerația unghiulară în

$$\frac{\text{unități de viteză unghiulară}}{\text{unități de timp}},$$

adică în rad/s^2.

În cazul exemplului considerat, accelerația cursorului la un moment dat este:

$$a = x'' = 12\,t.$$

Valorile accelerației a, în m/s^2, pentru diferite momente t sînt trecute în tabela 5.3.

Aceste valori au fost determinate introducînd în expresia accelerației valorile corespunzătoare ale lui t trecute în coloana din stînga a tabelei.

Tabela 5.3

Valorile accelerației cursorului în timp.

Valoarea lui t	Accelerația cursorului
$t_0 = 0$	$a_0 = 0$
$t_1 = 1$	$a_1 = 12$
$t_2 = 2$	$a_2 = 24$

12. Studiul cinematic al mișcării mecanice

În general, un corp material se află în mișcare față de un anumit sistem de referință dacă acel corp își schimbă în mod continuu poziția în raport cu sistemul de referință considerat, o dată cu trecerea timpului. Pentru studiul cantitativ al mișcării mecanice a unui corp va trebui să cunoaștem modul în care variază în timp mărimile geometrice care determină poziția momentană a corpului respectiv, precum și viteza și accelerația fiecărui punct al său.

Din punct de vedere matematic, aceasta revine la a studia expresiile care dau valorile mărimilor geometrice de poziție

ale corpului ca funcţii de timp, precum şi derivatele lor pînă la ordinul doi inclusiv.

În general, aceste funcţii le vom considera cunoscute sau vor fi deduse de noi pe considerente geometrice, fără a ne preocupa de modul în care ele apar ca o consecinţă a acţiunii forţelor exterioare asupra corpului respectiv; pe baza lor, vom studia *legea de distribuţie* a vitezelor şi acceleraţiilor în punctele corpului respectiv.

13. Diagramele mişcării

Să considerăm din nou mărimile geometrice care determină poziţia unui corp în spaţiu şi care în timpul mişcării corpului respectiv sînt funcţii de timp, $q = q(t)$. Să alegem un sistem de axe de coordonate care are pe ordonată valorile funcţiei q, iar pe abscisă valorile timpului t şi să reprezentăm grafic funcţia $q = q(t)$; vom obţine o curbă, a cărei formă depinde de expresia acestei funcţii. Cu ajutorul acestei curbe vom putea determina valoarea lui q pentru o valoare dată a timpului t.

Dar nu numai mărimea q poate fi reprezentată într-o asemenea diagramă, ci şi derivatele sale care, în general, sînt tot funcţii de timp; vom putea alcătui deci şi diagramele lor, din care putem afla valorile vitezei şi ale acceleraţiei de variaţie a parametrului respectiv în orice moment.

Reprezentările grafice $q = q(t)$, $\dot{q} = q'(t)$ şi $\ddot{q} = \ddot{q}(t)$ joacă un rol foarte important în cinematică, întrucît oferă o imagine foarte sugestivă a mişcării; ele sînt denumite *diagramele mişcării*. O utilizare curentă a acestor diagrame o găsim la căile ferate, unde servesc la reprezentarea grafică a mişcării trenurilor, în scopul stabilirii duratelor de staţionare, a locurilor de întîlnire etc.

14. Mişcarea uniformă

În continuare vom studia cîteva tipuri de mişcări; pentru aceasta va trebui să cunoaştem forma funcţiei $q = q(t)$. Teoretic, această funcţie poate avea, după cîte cunoaştem din matematică, forme destul de variate: polinoame, funcţii trigonometrice, funcţii logaritmice etc. Practica arată însă că nu este cazul să studiem toate aceste forme de funcţii, întrucît în teh-

nică intervin curent cîteva funcții avînd o formă simplă. Una din aceste forme simple o constituie funcția:

$$q = At + B, \tag{5.6}$$

unde A și B sînt două constante.

Derivatele acestei funcții au expresiile:

$$v = q' = A, \tag{5.7}$$

$$a = q'' = 0. \tag{5.8}$$

Ele reprezintă respectiv viteza v și accelerația a datorite variației parametrului q.

Reprezentarea grafică a acestor funcții pentru cazul $A > 0$, $B > 0$ este arătată în figura 5.2. Funcția $q = q(t)$ este reprezentată printr-o dreaptă înclinată față de axa Ot, întrucît ea este un polinom de gradul I în t; aceasta înseamnă că parametrul q crește proporțional cu timpul. Funcția $v = q'(t)$ este reprezentată printr-o dreaptă paralelă cu axa Ot; aceasta înseamnă că valoarea funcției $\dot{q}$ rămîne mereu aceeași. Funcția $a = q''(t)$ este reprezentată chiar prin axa Ot a diagramei, deoarece ea rămîne tot timpul nulă.

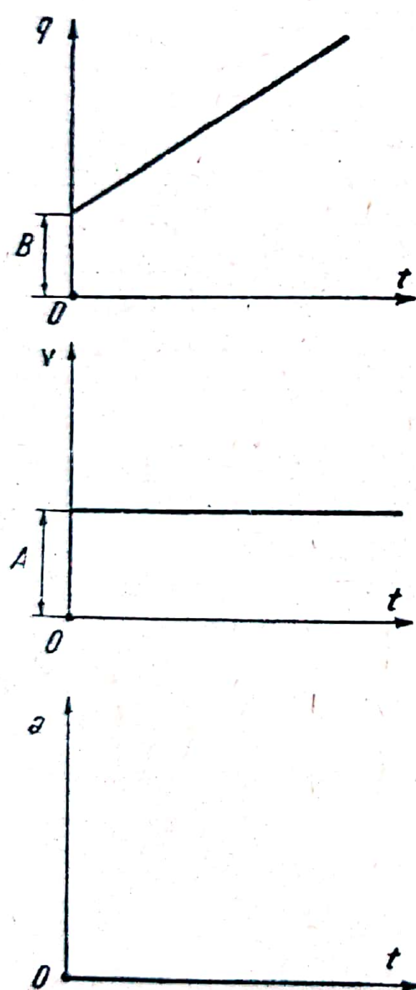


Fig. 5.2.

Să căutăm semnificația constantelor A și B. Din expresia lui $\dot{q}$ se vede că constanta A reprezintă viteza de variație a parametrului q. Pentru a găsi semnificația constantei B să observăm că dacă în expresia lui $q = q(t)$ facem $t = 0$, obținem $q = B$; constanta B reprezintă deci valoarea lui q în momentul inițial, adică cînd $t = 0$; această valoare o vom denumi *spațiu inițial*. Din punct de vedere fizic, spațiul inițial reprezintă depărtarea (distanța sau unghiul) la care se află mobilul față de originea de la care se măsoară valorile parametrului q în momentul inițial (la $t = 0$).

Mișcarea reprezentată prin funcția $q = q(t)$ dată de formula (5.6) este denumită în cinematică *mișcare uniformă*. Ea pre-

zintă o deosebită importanţă tehnică, întrucît organele rotative ale maşinilor au în timpul mişcărilor de regim mişcări uniforme sau mişcări care se apropie foarte mult de mişcarea uniformă.

E x e m p l u. Să presupunem că funcţia $q = q(t)$ are expresia :

$$q = 3t + 5. \tag{5.9}$$

Mărimea q poate reprezenta orice mărime geometrică ce caracterizează poziţia unui corp în spaţiu, ca de exemplu (fig. 5.3) : distanţa de la un stîlp O la omul care se deplasează pe o stradă rectilinie (a), unghiul făcut de una din spiţele unei roţi de la o transmisie cu curele cu o dreaptă fixă (b), lungimea arcului şinei de cale ferată parcurs de un tren aflat în mişcare pe o şină avînd atît porţiuni drepte cît şi curbe, măsurată de la anumită staţie O de pe traseu (c).

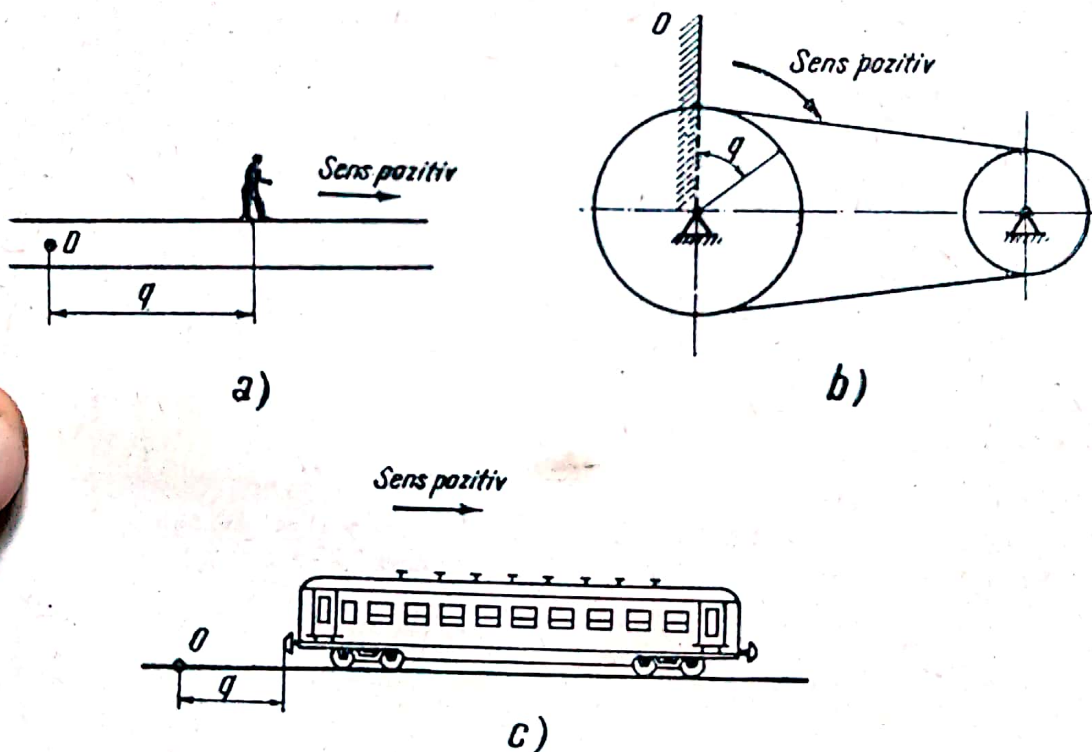


Fig. 5.3.

Din expresia funcţiei q tragem concluzia că în momentul cînd începe mişcarea ($t = 0$) parametrul q are valoarea $B = 5$ (metri sau radiani, după cum ele reprezintă o distanţă sau un unghi). Această valoare reprezintă distanţa la $t = 0$ a omului faţă de stîlp, a trenului faţă de gară sau unghiul la pornire dintre dreapta fixă şi dreapta trasată pe roata de curea.

Constanta A are în acest caz valoarea $A = 3$ (m/s sau rad/s). Această valoare reprezintă viteza constantă de deplasare a omului, a trenului sau viteza unghiulară de rotaţie a roţii de la transmisia cu curea.

În concluzie, toate corpurile din figura 5.3 au mişcări uniforme care încep cu valoarea iniţială $q = 5$ (m sau rad) şi se desfăşoară cu o viteză constantă egală cu 3 (m/s sau rad/s). Diagramele de variaţie ale lui q sînt reprezentate în figura 5.2 unde vom înlocui $A = 3$, $B = 5$.

Dacă dorim să aflăm care este poziţia corpurilor din figura 5.3 după trecerea unui anumit timp (să zicem $t = 4$ s,) marcăm această valoare pe axa Ot şi din punctul astfel obţinut ridicăm o perpendiculară pe axa Ot pînă la intersecţia cu diagrama; lungimea acestei perpendiculare reprezintă valoarea parametrului q la timpul $t = 4$. Ea mai poate fi determinată şi analitic introducînd valoarea lui t în expresia (5.9); obţinem:

$$q(4) = 3 \times 4 + 5 = 17 \text{ (m sau rad).}$$

Înainte de a încheia analiza mişcării uniforme, observăm că mărimile A şi B din expresia (5.6) pot avea şi valori negative sau nule. Faptul că mărimea A (viteza de variaţie a lui q) este negativă înseamnă că q descreşte; corpurile din figura 5.3 se mişcă în sensul invers sensului pozitiv pe această figură. Faptul că mărimea B (valoarea iniţială a lui q) este negativă înseamnă că corpul respectiv ocupă o poziţie spre sensul negativ al valorilor parametrului: omul se află în stînga stîlpului O, raza de pe roata de curea se află în stînga dreptei fixe de referinţă, trenul se află în stînga gării.

Dacă $A = 0$, atunci $q = B$, ceea ce înseamnă că mărimea q are o valoare constantă adică de fapt corpul nu se mişcă ci rămîne fix la depărtarea B de origine; dacă $A = B = 0$ corpul rămîne fix în origine. Diagramele din figura 5.2 au fost construite pentru cazul $A > 0$, $B > 0$.

15. Mişcarea uniform variată

Să examinăm mişcarea unei pietre care cade; în timpul acestei căderi, viteza pietrei nu mai rămîne constantă ca în cazul mişcării uniforme, ci creşte din ce în ce. După cîte ştim din fizică, spaţiul parcurs de piatra în cădere creşte cu pătratul timpului şi nu proporţional cu timpul, ca în cazul mişcării uniforme. Asemenea mişcări se numesc *mişcări uniform variate.*

Mărimile geometrice q care caracterizează poziţiile corpurilor care au mişcări uniform variate au expresia:

$$q = At^2 + Bt + C, \tag{5.10}$$

care reprezintă un polinom de gradul al doilea în t.

Derivatele acestei funcţii au expresiile:

$$\begin{aligned} v &= \dot{q} = 2At + B, \\ a &= \ddot{q} = 2A. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ele reprezintă respectiv viteza de variaţie şi acceleraţia de variaţie a lui q.

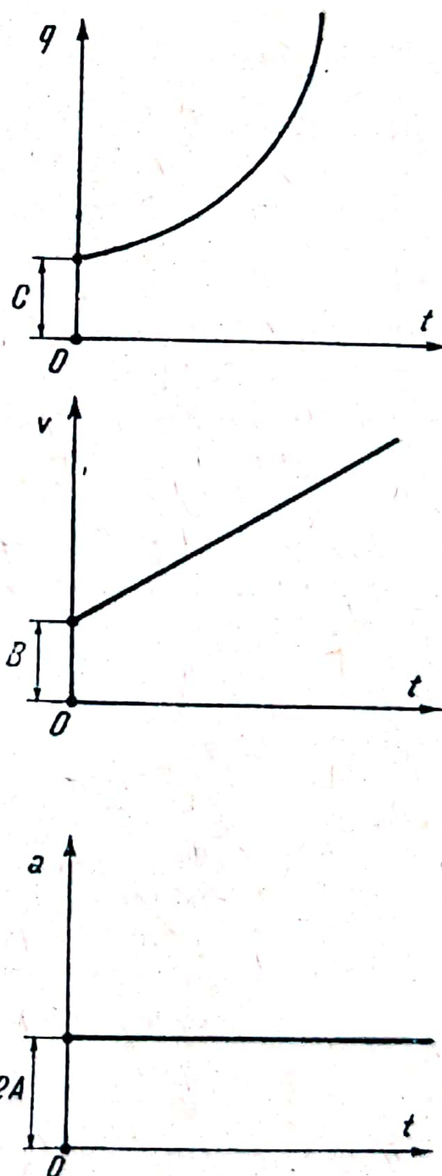


Fig. 5..4

Reprezentarea grafică a acestor funcţii pentru cazul $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ este arătată în figura 5.4. Funcţia $q = q(t)$ este reprezentată printr-o parabolă avînd concavitatea îndreptată în sus, întrucît ea este un polinom de gradul al doilea în t; aceasta înseamnă că parametrul q variază în mod diferit faţă de cazul mişcării uniforme, unde el creştea sau descreştea proporţional cu timpul. Funcţia $v = \dot{q}(t)$ este reprezentată printr-o dreaptă înclinată faţă de axa Ot; aceasta înseamnă că viteza creşte (sau descreşte) proporţional cu timpul; cu cît timpul trece cu atît viteza devine mai mare (sau mai mică). Funcţia $a = \ddot{q}(t)$ este reprezentată printr-o paralelă la axa Ot, ceea ce înseamnă că acceleraţia este o constantă.

Să căutăm semnificaţia fizică a constantelor A, B, C. Din expresia lui a se vede că constanta A reprezintă jumătate din acceleraţie $\left(A = \frac{\ddot{q}}{2}\right)$. Dacă în expresia lui v facem $t=0$ obţinem $v=B$, ceea ce înseamnă că constanta B reprezintă viteza iniţială (viteza la $t = 0$). Dacă acum facem $t=0$ în expresia lui q, obţinem $q = C$, adică constanta C reprezintă spaţiul iniţial.

Mărimile A, B, C pot fi pozitive, negative sau nule.

Remarcăm faptul că dacă $A = 0$ avem cazul studiat mai înainte al mişcării uniforme. Diagramele din figura 5.4 au fost construite pentru cazul cînd toate cele trei constante A, B şi C sînt pozitive.

Dacă la un moment dat t, în timpul mişcării, produsul dintre v şi a este pozitiv ($va > 0$), ceea ce revine la a spune că mărimile v şi a sînt sau ambele pozitive sau ambele negative (au acelaşi semn), mişcarea respectivă se numeşte *uniform accelerată*, iar în caz contrar *uniform întîrziată*. Într-adevăr, în primul caz corpul respectiv se mişcă din ce în ce mai repede în sensul creşterii parametrului q dacă atît v cît şi a sînt pozitivi, sau în sens contrar creşterii parametrului q dacă v şi a sînt amîndoi negativi, iar în cel de-al doilea caz, el se mişcă din ce în ce mai încet pînă se opreşte.

Mişcarea uniform variată prezintă de asemenea o mare importanţă pentru tehnică; într-adevăr, după cîte ştim din practică, orice maşină pentru a fi adusă la mişcarea de regim trebuie accelerată din starea de repaus pînă la turaţia de regim, iar pentru a fi oprită trebuie ca şă i se micşoreze din ce în ce viteza; în timpul acestor două perioade, organele mobile ale maşinilor au în general mişcări uniform accelerate sau uniform întîrziate.

E x e m p l e. Volantul unei maşini se mişcă astfel încît unghiul q dintre o dreaptă fixă şi o rază trasată pe el variază după legea:

$$q = 5\,t^2 + 2.$$

În acest caz, coeficienţii din formula (5.10) au valorile $A = 5$, $B = 0$, $C = 2$, adică putem spune că volantul se mişcă uniform accelerat cu acceleraţia $5 \times 2 = 10$ rad/s² plecînd din repaus, adică fără viteză iniţială (deoarece $B = 0$) şi astfel încît el are un spaţiu în momentul plecării de 2 rad (spaţiul iniţial). Viteza unghiulară a volantului este variabilă cu timpul: $v = 10$ t rad/s. Diagramele de mişcare ale volantului sînt cele din figura 5.4, în care se înlocuiesc valorile constantelor A, B şi C cu cele arătate mai sus.

Un exemplu de mişcare uniform variată îl constituie — după cum am văzut mai sus — căderea liberă a corpurilor pe verticală. Distanţa q măsurată pe verticală este dată de expresia:

$$q = \frac{gt^2}{2}.$$

Dacă aruncarea se face fără viteză inițială din locul unde se află originea distanțelor q avem:

$$v=\dot{q}=gt,\ a=\ddot{q}=g,$$

g fiind accelerația gravitației.

Dacă se elimină timpul între expresia lui v și cea a lui q se obține:

$$v=\sqrt{2gq}, \tag{5.12}$$

expresie cunoscută din fizică sub numele de *formula lui Torricelli.*

16. Mișcarea oscilatorie armonică

În tehnică întîlnim o serie de organe de mașini pe care, după trecerea unui anumit timp, le regăsim în aceeași poziție, ca de exemplu pistonul unui motor cu explozie, vătala unui război de țesut, scula prelucrătoare de la raboteză ș.a. Aceste organe efectuează ceea ce se numește în cinematică o *mișcare periodică*. Mărimile geometrice (unghiuri sau distanțe) care caracterizează poziția lor sînt funcții periodice de timp. Asemenea funcții se caracterizează prin aceea că după o anumită valoare a timpului, denumită *perioadă*, își recapătă o valoare avută anterior, ceea ce înseamnă că corpul își ocupă din nou, după trecerea unui anumit timp, o poziție avută anterior, avînd aceeași viteză și aceeași accelerație.

Într-adevăr, după trecerea timpului necesar efectuării unei curse, regăsim pistonul unui motor în aceeași poziție, avînd aceeași viteză și aceeași accelerație.

Funcțiile care descriu asemenea mișcări se numesc *funcții periodice*; ele se bucură de proprietatea că după un anumit interval de variație a variabilei independente, denumit perioadă, ele își recapătă aceleași valori. O asemenea funcție este funcția trigonometrică $\sin x$, pentru care avem:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \dots = \sin(x + 2k\pi).$$

Tot funcții periodice sînt și funcțiile $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ș.a.

Să presupunem că poziția unui organ de mașină (o culisă, o manivelă, un volant) este determinată cu ajutorul unui unghi

sau al unei distanțe a cărei expresie ca funcție de timp este dată de relația :

$$q = A \sin (\omega t + \varphi), \tag{5.13}$$

în care mărimile A, ω și φ sînt niște constante a căror semnificație fizică o vom vedea în cele ce urmează.

Derivatele acestei funcții au expresiile :

$$v = \dot{q} = A\omega \ \cos\ (\omega t + \varphi), \tag{5.14}$$

$$a = \ddot{q} = -A\omega^2 \ \sin\ (\omega t + \varphi) = -\omega^2 q. \tag{5.15}$$

Ele reprezintă, la fel ca și pentru celelalte mișcări studiate pînă aci, viteza și accelerația de variație a parametrului q.

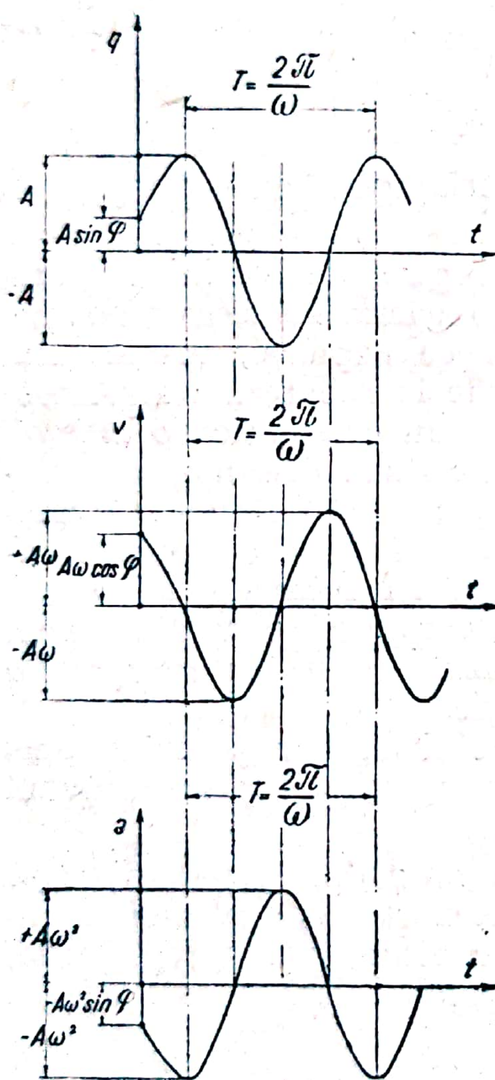


Fig. 5.5.

Reprezentarea grafică a acestor funcții este arătată în figura 5.5. Funcția $q = q(t)$ este reprezentată printr-o sinusoidă de amplitudine A și de perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$[1], care nu trece în general prin punctul O ; funcția $v = \dot{q}\ (t)$ se reprezintă printr-o cosinusoidă de amplitudine $A\omega$, de aceeași perioadă, care de asemenea nu trece în cazul general prin originea O ; funcția $a = \ddot{q}\ (t)$ nu este altceva decît tot funcția $q = \dot{q}\ (t)$, ale cărei ordonate au fost amplificate cu mărimea ω și li s-a schimbat semnul.

Caracteristica generală a acestor mișcări o constituie faptul că atît mărimea q cît și viteza v și accelerația a nu pot căpăta valoari infinite, ca în cazul celorlalte mișcări studiate mai sus, ci, după trecerea unui timp egal cu perioada, ele recapătă valorile avute anterior.

---

[1] Mărimea $f = \frac{1}{T}$ care reprezintă numărul de perioade în unitatea de timp poartă denumirea de *frecvența mișcării*.

Să căutăm acum semnificaţia fizică a constantelor A, ω şi φ. Pentru aceasta, observăm mai întîi că valorile extreme ale lui $\sin(\omega t + \varphi)$ nu pot fi decît $+1$ sau -1; rezultă că valorile extreme ale lui q sînt $+A$ şi $-A$; am găsit astfel semnificaţia fizică a constantei A; ea reprezintă valoarea maximă a lui q, sau cum se mai numeşte în fizică, *amplitudinea mişcării*. Corpul a cărui poziţie este determinată de mărimea q avînd expresia (5.13) nu poate ocupa nici o poziţie pentru care ar corespunde valori ale lui q mai mari decît A.

Constanta φ poartă denumirea de *fază iniţială*; ea joacă aci rolul spaţiului iniţial din cazul mişcării uniforme sau uniform variate, deoarece pentru $t = 0$ avem $q_0 = A \sin \varphi$, ceea ce se observă de altfel şi pe diagrama $q = q(t)$ din figura 5.5. Constanta ω poartă denumirea de *pulsaţie* sau *viteză unghiulară a mişcării*. Ultima denumire provine de la faptul că dacă am considera un punct oarecare M care s-ar mişca pe un cerc astfel încît unghiul α care-i determină poziţia să fie dat de expresia:

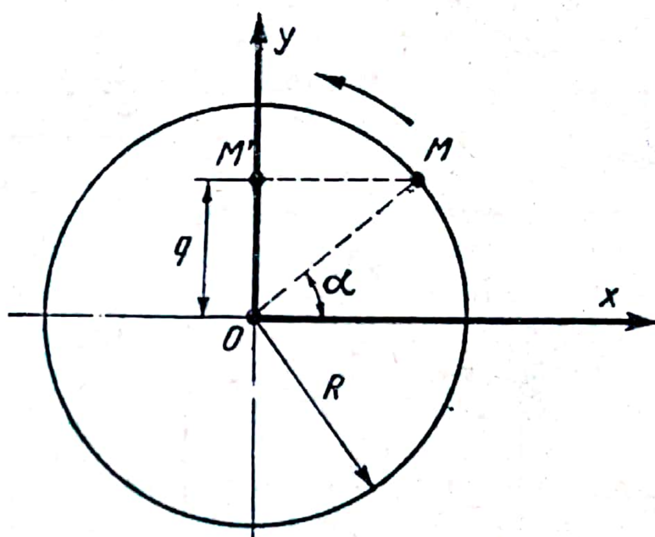


Fig. 5.6.

$$\alpha = \omega t + \varphi, \tag{5.16}$$

adică ar descrie o mişcare circulară uniformă, atunci proiecţia sa M' pe diametrul vertical se mişcă după legea:

$$q = OM \sin \alpha = R \sin(\omega t + \varphi), \tag{5.17}$$

adică ar descrie o mişcare rectilinie oscilatorie armonică cu amplitudine R (fig. 5.6). Mărimea ω din expresia (5.16) reprezintă viteza de variaţie a unghiului α sau viteza unghiulară a mişcării punctului M.

Mişcarea reprezentată prin funcţia $q = A \sin(\omega t + \varphi)$ sau $q = A \cos(\omega t + \varphi)$ este denumită în cinematică *mişcare oscilatorie armonică*; ea constituie un caz particular de mişcare periodică. Mişcarea oscilatorie armonică prezintă o importanţă tehnică deosebită, deoarece foarte multe organe mobile ale maşini-

lor descriu mişcări periodice oscilatorii armonice sau care pot fi aproximate cu mişcări oscilatorii armonice; astfel, mişcarea unui tachet acţionat de o camă, mişcarea pistonului unui mecanism bielă-manivelă, mişcarea unei greutăţi atîrnată liber de un resort constituie numai cîteva exemple de mişcări periodice întîlnite în tehnică.

Exemple. Să considerăm mecanismul din figura 5.7,*a*, format din bara OA, de lungime l, care se poate roti în jurul articulaţiei O şi care este articulată în cealaltă extremitate A cu o bară AB avînd aceeaşi lungime l; bara AB este articulată în extremitatea B cu o culisă, care se deplasează într-un şanţ rectiliniu fix. Acest mecanism este folosit pentru ghidarea uşilor unor tramvaie ale I.T.B. Să studiem mişcarea culisei B. Pentru aceasta, observăm că poziţia acestei culise în ghidajul său este determinată de distanţa $OB = q$ în timp ce poziţia barei OA care transmite mişcarea întregului mecanism este determinată de unghiul α.

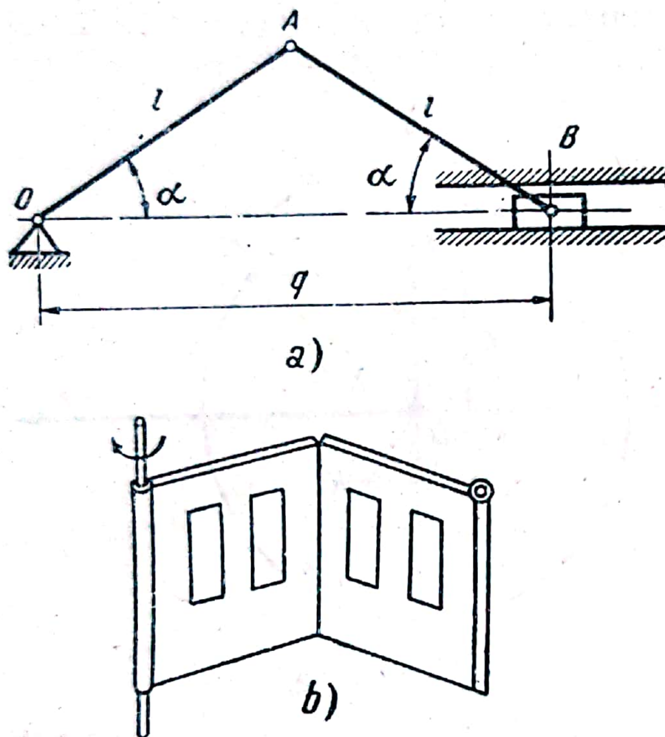


Fig. 5.7.

Să presupunem că bara OA are o mişcare uniformă; aceasta înseamnă că unghiul α care-i determină poziţia variază după legea (5.6):

$$\alpha = \omega t + \alpha_0,$$

în care ω este viteza de variaţie a lui α (viteza unghiulară a barei OA), α_0 valoarea lui α în momentul începerii mişcării, iar t timpul. Mărimile ω şi α_0, sînt cunoscute. În acest caz, valoarea mărimii q care determină poziţia culisei este dată de expresia:

$$q = OB = OA \cos\alpha + AB \cos\alpha = 2l \cos \alpha = 2l \cos (\omega t + \alpha_0)$$

(deoarece triunghiul OAB este isoscel, avînd $\sphericalangle BOA = \sphericalangle ABO = \alpha$).

Culisa articulată în punctul B descrie deci o mişcare oscilatorie armonică, care are amplitudinea $A = 2l$, pulsaţia egală cu viteza unghiulară a barei OA, iar faza iniţială este $\varphi = \alpha_0$, valoarea iniţială a unghiului α. Diagramele mişcării culisei sînt cele din figura 5.5 în care s-au înlocuit $A = 2l$ şi $\varphi = \alpha_0$.

Capitolul VI

CINEMATICA SISTEMELOR MATERIALE IN RAPORT CU UN REPER FIX

1. Cinematica punctului material

Cel mai simplu sistem material cu studiul mişcării căruia se ocupă cinamatica este *punctul material*; cunoşterea modului în care se determină poziţia, deplasarea, traiectoria, viteza şi acceleraţia unui punct material precum şi a modului în care se alcătuiesc diagramele mişcării acestuia constituie noţiunile de bază pentru studierea mişcării solidului rigid şi a sistemelor de solide rigide. În cinematică, punctul material este reprezentat printr-un punct geometric (figura geometrică fără nici o dimensiune), care poate ocupa diferite poziţii în spaţiu o dată cu trecerea timpului; el corespunde acelor corpuri din natură ale căror dimensiuni în raport cu cele ale sistemului de referinţă sînt neglijabile sau acelor corpuri pentru care vitezele în diferitele puncte ale lor nu diferă prea mult între ele.

a) **Mişcarea curbilinie.** *Determinarea poziţiei.* Să considerăm un punct oarecare M aflat în spaţiu; poziţia sa faţă de un anumit sistem de referinţă $Oxyz$ este complet determinată prin trei coordonate (numere) x, y, z care pot avea orice valori; vom spune deci că *un punct M liber în spaţiu are trei grade de libertate.* Dacă cele trei coordonate ale punctului M au valori constante, punctul ocupă o poziţie fixă în spaţiu; dacă cel puţin una dintre ele este o funcţie de timp, punctul M va ocupa, o dată cu trecerea timpului, diferite poziţii în spaţiu. Unind între ele printr-o curbă continuă toate aceste poziţii, vom obţine *traiectoria* punctului M. Pe această traiectorie, punctul M se mişcă cu o anumită viteză şi acceleraţie.

Vom spune că am determinat mişcarea unui punct material dacă vom cunoaşte traiectoria sa, viteza şi acceleraţia în orice moment.

În cele ce urmează vom considera că sînt cunoscute coordonatele punctului M ca funcții de timp.

Un exemplu practic de mișcare a unui corp care poate fi considerat punct material îl constituie mișcarea oalei cu metal fierbinte dintr-o turnătorie; această oală este deplasată dintr-un punct într-altul al halei cu ajutorul cîrligelor de macara ale unui pod rulant. Muncitorul care manevrează motoarele podului rulant poate face ca pe rînd sau simultan să varieze una, două sau toate cele trei coordonate ale punctului M (oala cu metal), obligînd-o pe aceasta să descrie cele mai diferite traiectorii prin spațiul halei, după necesitățile procesului tehnologic respectiv, privind umplerea cu metal a diferitelor forme aflate în hală.

Traiectorie. Pentru a determina traiectoria punctului mobil cunoscînd coordonatele sale ca funcții de timp, vom da varia-

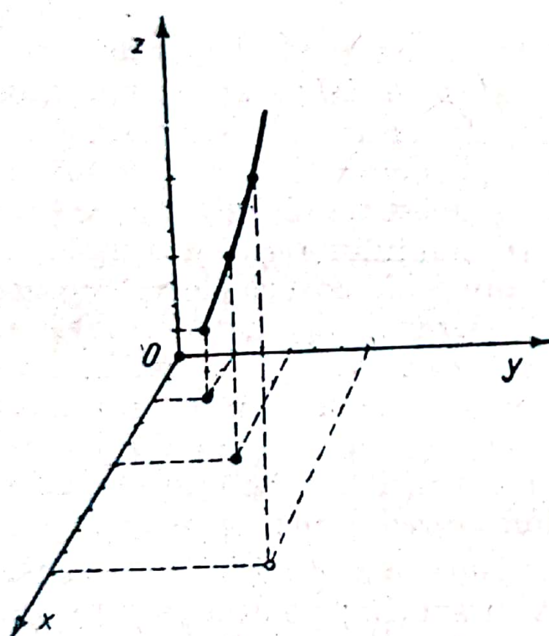


Fig. 6.1.

Tabela 6.1

Valorile coordonatelor punctului M

t	x	y	z
1	2	2	1
2	5	4	4
3	10	6	7

bilei t diferite valori și apoi vom reprezenta în spațiu coordonatele punctului mobil la momentele respective. Astfel, dacă punctul M are coordonatele date de expresiile:

$$x = t^2 + 1, \quad y = 2t, \quad z = 3t - 2, \tag{6.1}$$

vom putea alcătui o tabelă de forma tabelei 6.1, cu ajutorul căreia putem reprezenta fața de sistemul de coordonate considerat diferitele poziții ale punctului mobil; unindu-le între ele, căpătăm traiectoria punctului (fig. 6.1).

Viteza. Pentru a studia mişcarea punctului M, să considerăm trei poziţii pe traiectoria sa: poziţia M_0 corespunzătoare valorii timpului $t=0$, poziţia M corespunzătoare unei valori oarecare t a timpului şi ultima M_1, corespunzătoare valorii $t+\Delta t$ a timpului, în care Δt reprezintă intervalul de timp necesar ajungerii din poziţia M în poziţia M_1. Fiecare din aceste poziţii este determinată la momentul respectiv prin anumite valori particulare ale mărimilor x, y şi z (coordonatele punctului); astfel avem (fig. 6.2):

— pentru poziţia M_0: $x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0,$

— pentru poziţia M: $x=x, \quad y=y, \quad z=z,$

— pentru poziţia M_1: $x_1=x+\Delta x$ (6.2)

$y_1=y+\Delta y$

$z_1=z+\Delta z.$

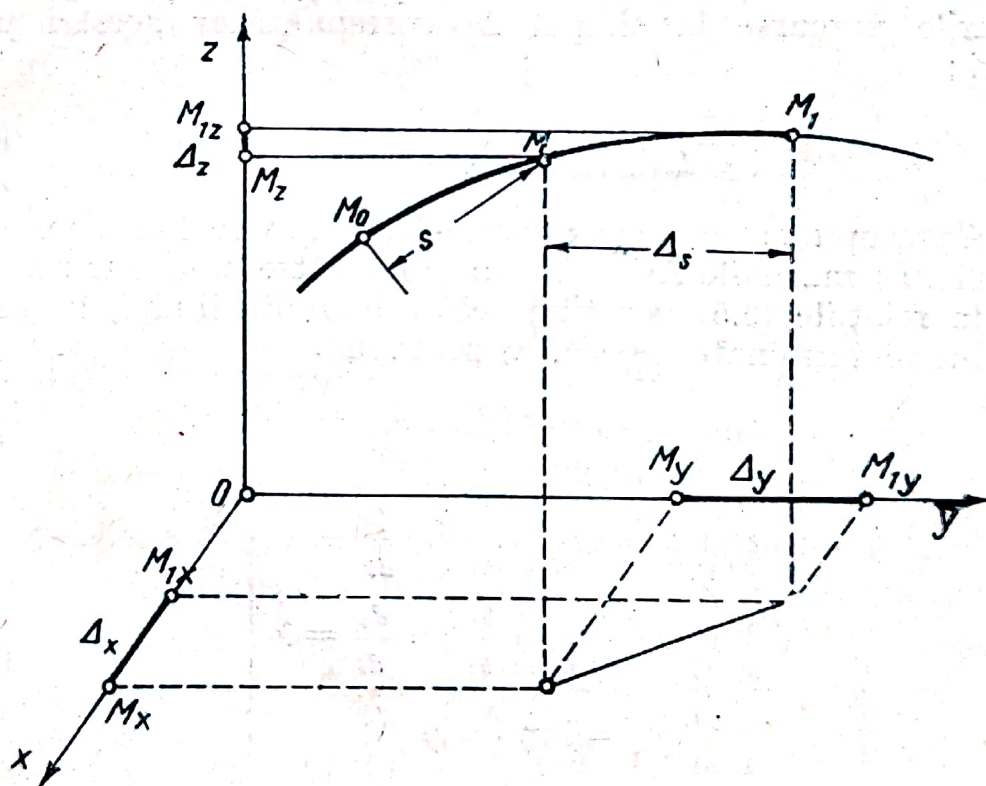


Fig. 6.2.

Viteza medie a punctului mobil între poziţiile M şi M_1 este prin definiţie raportul dintre drumul parcurs şi timpul corespunzător acestei parcurgeri:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{6.3}$$

Să presupunem că arcul de curbă MM_1 este destul de mic; în acest caz, el poate fi înlocuit în mod aproximativ cu coarda MM_1. Dacă proiectăm acum această coardă pe cele trei axe de coordonate, vom obține:

$$\begin{aligned}(\text{pr } MM_1)_{Ox} &= \Delta x \\ (\text{pr } MM_1)_{Oy} &= \Delta y \\ (\text{pr } MM_1)_{Oz} &= \Delta z.\end{aligned} \tag{6.4}$$

O dată cu punctul M se mişcă şi punctele M_x, M_y, M_z, care sînt proiecţiile punctului M pe cele trei axe.

Deplasării punctului din M în M_1 îi corespund trei deplasări $M_xM_{1x} = \Delta x$, $M_yM_{1y} = \Delta y$, $M_zM_{1z} = \Delta z$, pe cele trei axe de coordonate.

Vitezele în mişcarea acestor trei puncte se obţin raportînd drumurile parcurse la timpul Δt corespunzător acestei parcurgeri:

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \qquad v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t}. \tag{6.5}$$

Să presupunem acum că punctul M_1 se apropie foarte mult de punctul M; mărimile Δs şi Δt vor tinde către zero, dar rapoartele din relaţiile (6.5) vor tinde către anumite limite, în general, bine determinate. Astfel vom avea:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} v_{mx} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \lim_{\Delta t \to 0} v_{my} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \lim_{\Delta t \to 0} v_{mz} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Mărimile v_x, v_y, v_z pot fi considerate drept proiecţiile unui vector v situat pe tangeta în M la traiectoria acestui punct, denumit vectorul viteză (fig. 6.3). El se află pe tangentă la traiectorie deoarece la limită, cînd M_1 tinde către M, coarda MM_1 devine tangentă la traiectorie. Modulul vectorului viteză se calculează cu formula cunoscută:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{6.8}$$

Unghiurile făcute de vectorul viteză cu axele Ox, Oy, Oz sînt date de relaţiile :

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v},$$
$$\cos\beta = \frac{v_y}{v}, \qquad (6.9)$$
$$\cos\gamma = \frac{v_z}{v}.$$

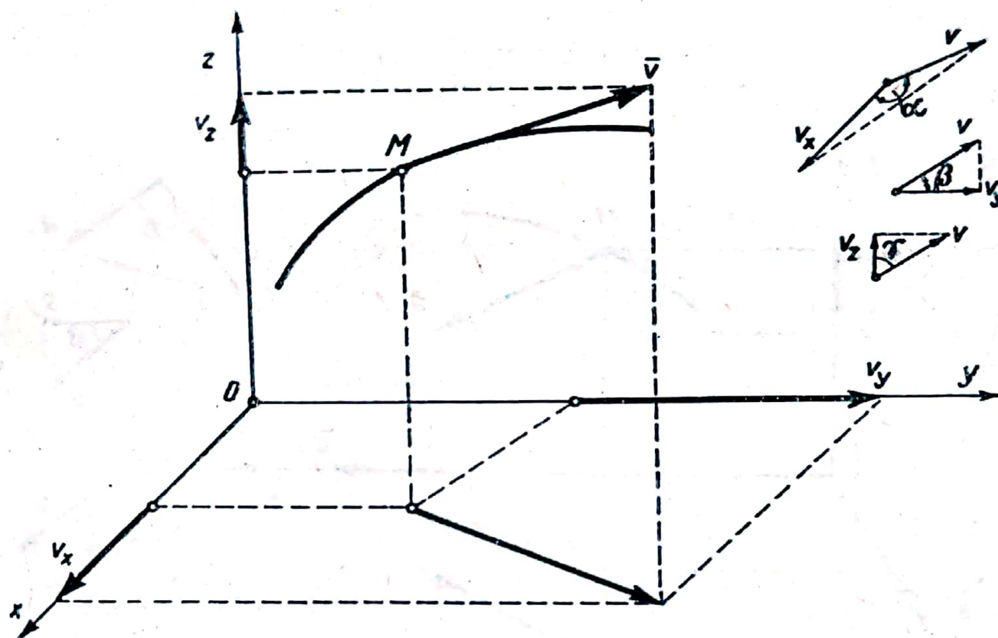


Fig. 6.3.

Acceleraţia. Să derivăm cele trei proiecţii ale vectorului viteză ; vom obţine trei mărimi a_x, a_y, a_z care au valorile :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x},$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \qquad (6.10)$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Ele pot fi considerate de asemenea proiecţiile unui alt vector $\bar{a}$, denumit vectorul acceleraţie al punctului M. Spre deosebire de vectorul viteză, după cum vom vedea mai departe în cazul cîtorva mişcări particulare, vectorul acceleraţie nu mai este situat pe tangenta la traiectorie în M (fig. 6.4).

Modulul vectorului accelerație are valoarea:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (6.11)$$

Unghiurile făcute de vectorul accelerație cu Ox, Oy, Oz sînt date de relațiile:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a},$$
$$\cos \beta = \frac{a_y}{a}, \qquad (6.12)$$
$$\cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

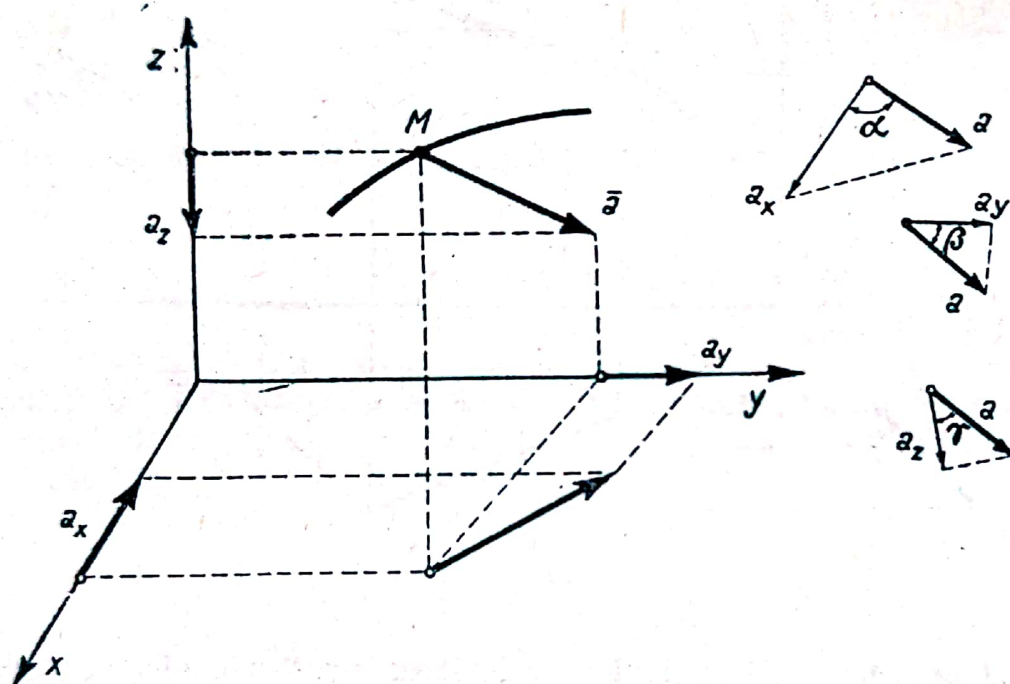


Fig. 6.4.

Cu ajutorul acestor formule vom putea determina complet vectorul accelerație ca mărime, direcție, sens.

b) **Mișcarea rectilinie**. Să presupunem că punctul mobil M al unui organ de mașină execută o mișcare rectilinie, adică descrie drept traiectorie o linie dreaptă. Un asemenea punct poate fi spre exemplu un punct al pistonului unui motor (fig. 6.5).

Dacă alegem această dreaptă ca axă Ox, două dintre coordonatele punctului M (coordonatele y și z) sînt nule, iar coordonata x este o funcție de timp:

$$x = x(t),\ y = 0,\ z = 0. \qquad (6.13)$$

În acest caz, punctul mobil M se confundă cu proiecția sa M_x; el are ca traiectorie axa Ox, deoarece numai în punctele acestei

axe coordonatele y şi z sînt nule (fig. 6.5). Vectorii viteză şi accelerație sînt îndreptați în lungul axei Ox, în acelaşi sens cu aceasta sau în sens contrar. Într-adevăr, din formulele (6.13) se deduce :

$$v_y = v_z = a_y = a_z = 0, \tag{6.14}$$

$$v = v_x = \dot{x}, \qquad a = a_x = \ddot{x}. \tag{6.15}$$

Mişcarea rectilinie poate fi de mai multe feluri, după forma funcției $x = x(t)$; astfel putem avea mişcare rectilinie uniformă, mişcare rectilinie uniform variată, mişcare rectilinie oscilatorie armonică etc. Proprietățile acestor mişcări precum şi diagramele lor au fost studiate în capitolul V.

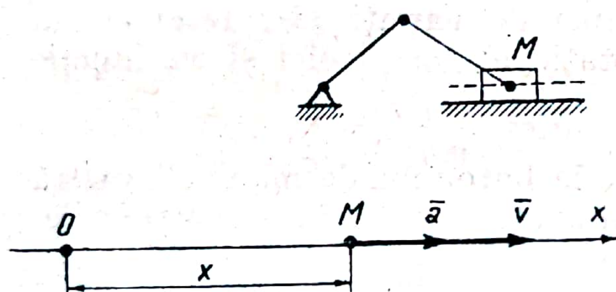


Fig. 6.5.

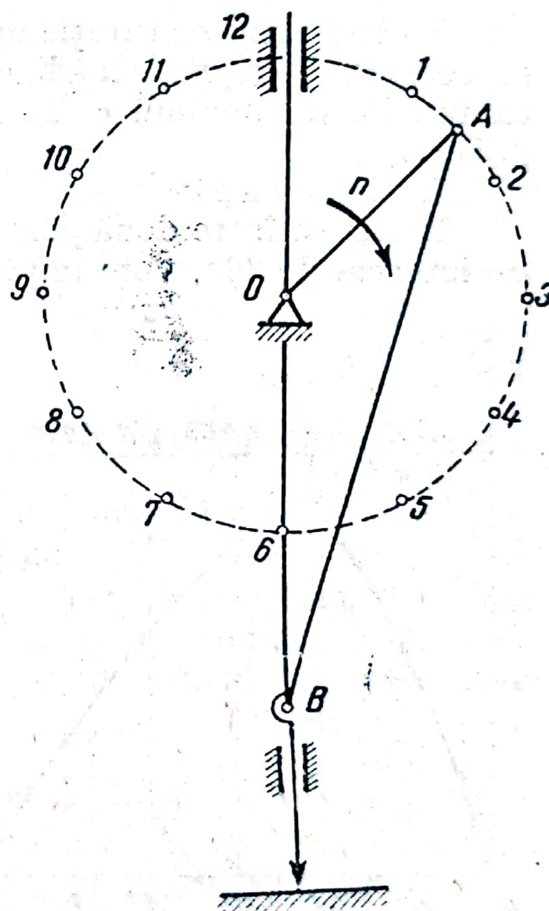


Fig. 6.6.

Mişcarea rectilinie se întîlneşte adesea în tehnică ; mişcarea diferitelor vehicule pe drumuri rectilinii (automobile, trenuri etc.), mişcarea diferitelor organe de maşini şi maşini (masa rabotezei, capul şepingului, suveica unei maşini de cusut, o parte din organele maşinilor textile, pînza unui ferăstrău) constituie numai cîteva exemple de corpuri ale căror puncte descriu mişcări rectilinii.

Studiul mişcării rectilinii revine la determinarea vitezei, accelerației şi a drumului parcurs de către punctul mobil pe traiectoria rectilinie cunoscută.

E x e m p l u . Acul maşinii universale de cusut fețe din industria încălțămintei este acționat de mecanismul bielă-manivelă arătat în figura 6.6. Dacă se împarte cercul manivelei OA

în 12 părţi egale, viteza acului în momentul în care butonul de manivelă A ajunge într-una din poziţiile 1, 2,..., 12 este dată în tabela 6.2.

Tabela 6.2

Valorile vitezei acului

Poziţia butonului A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Viteza acului m/s	2,72	4,20	3,93	2,84	1,40	0	1,40	2,84	3,93	4,20	2,72	0

Ţinînd seama că turaţia manivelei OA este $n = 2\,000$ rot/min, se cere să se reprezinte diagrama de variaţie a vitezei acului ca funcţie de unghiul φ de rotaţie al manivelei şi ca funcţie de timp.

Rezolvare

Deoarece între două poziţii ale butonului de manivelă există un interval de 30°, vom împărţi axa absciselor în 12 părţi egale,

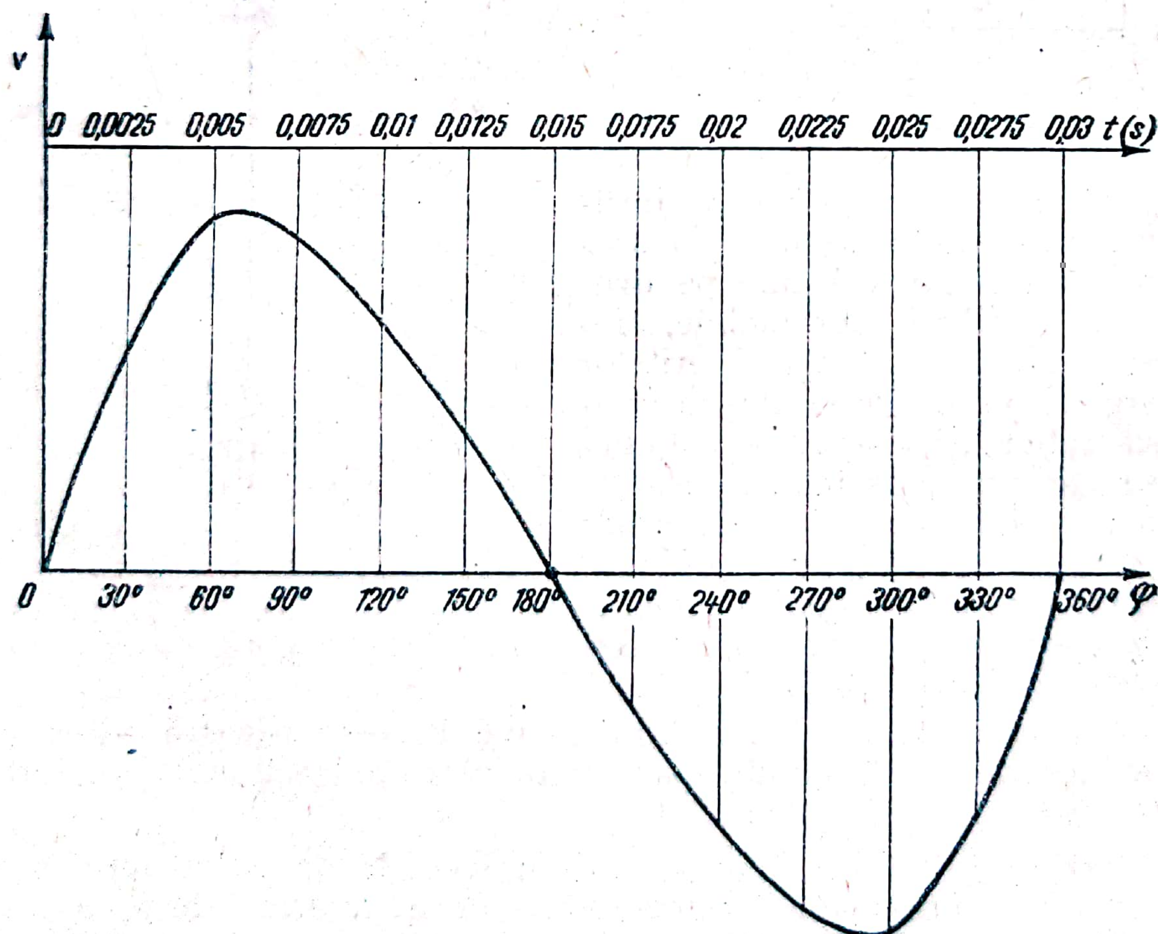


Fig. 6.7.

fiecare reprezintînd 30°; pe ordonatele ridicate în dreptul acestor diviziuni măsurăm la o scară anumită valorile vitezelor acului din tabela dată. Vitezele acului le vom considera pozitive pentru cursa de ducere (în jos) şi negative pentru cursa de întoarcere; diagrama astfel alcătuită este arătată în figura 6.7.

Pentru a reprezenta diagrama vitezei acului ca funcţie de timp, observăm că, datorită faptului că manivela OA se roteşte cu viteză unghiulară constantă, diviziunile de pe abscisă nu se vor modifica ci vor căpăta alte valori. Va trebui să căutăm ce interval de timp corespunde străbaterii de către manivela OA a unghiului dintre două poziţii consecutive (30°); pentru aceasta, raţionăm astfel:

— manivela OA efectuează o rotaţie completă (360°) în timpul

$$t_1 = \frac{1}{2\,000} \text{ minute} = \frac{60}{2\,000} \text{ secunde};$$

— manivela OA va efectua a 2-a parte dintr-o rotaţie $\left(30° = \frac{360}{12}\right)$ în timpul

$$t_2 = \frac{60}{2\,000 \times 12} \text{ secunde} = \frac{1}{400} \text{ secunde} = 0{,}0025 \text{ s}.$$

Diviziunile abscisei, în unităţi de timp, sînt arătate în partea superioară a diagramei din figura 6.7.

c) **Mişcarea circulară**. Să presupunem că un punct M al unui mecanism se mişcă pe un cerc. Un asemenea punct poate fi de exemplu un punct al unei roţi de curea sau al manivelei unui motor (fig. 6.8). Dacă alegem un sistem de axe xOy avînd originea O în centrul cercului, coordonata z a punctului mobil este nulă, iar celelalte două coordonate au valorile:

$$x = R\cos\theta,\qquad y = R\sin\theta, \tag{6.16}$$

în care R este raza cercului, iar θ unghiul format de raza OM cu axa Ox; el este funcţie de timp.

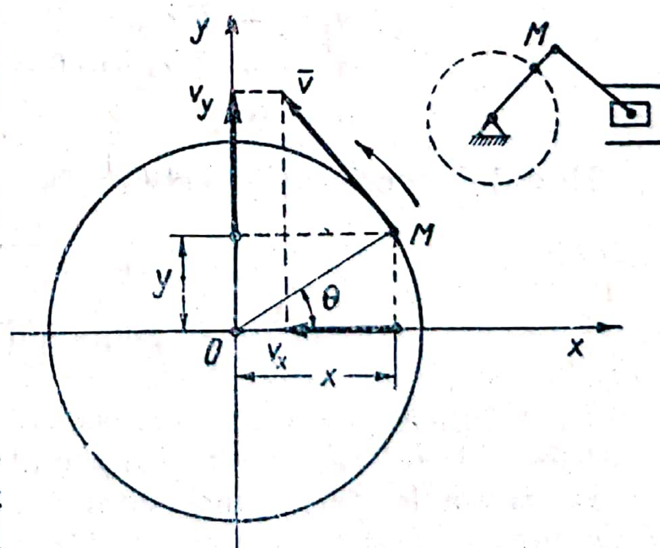


Fig. 6.8.

Funcţia $\theta = \theta(t)$ poate avea diferite forme; deocamdată nu ne vom preocupa de ea, ci remarcăm doar faptul că dacă traiectoria circulară a punctului mobil M este cunoscută, unghiul θ poate determina singur poziţia punctului M pe traiectorie; aceasta revine la a spune că în aceste condiţii punctul M are un singur grad de libertate. Deoarece parametrul θ reprezintă un unghi, derivatele sale le vom numi respectiv *viteză unghiulară* ($\dot{\theta}$) şi *acceleraţie unghiulară* ($\ddot{\theta}$) şi le vom nota astfel:

$$\dot{\theta} = \omega, \qquad \ddot{\theta} = \varepsilon.$$

Viteza unghiulară ω reprezintă unghiul parcurs de raza OM în unitatea de timp, iar acceleraţia unghiulară ε reprezintă variaţia vitezei unghiulare ω în unitatea de timp.

Să calculăm viteza şi acceleraţia punctului mobil; după cum am arătat mai sus, proiecţiile vitezei pe axe se află derivînd coordonatele punctului mobil în raport cu timpul:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -R\sin\theta. \quad \dot{\theta} = -R\omega\sin\theta. \\ v_y &= \dot{y} = R\cos\theta \quad \ddot{\theta} = R\omega\cos\theta. \\ v_z &= \dot{z} = 0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\theta + R^2\omega^2\cos^2\theta} = R\omega. \tag{6.18}$$

Pentru aflarea acceleraţiei mai derivăm o dată componentele vitezei; avem:

$$\begin{aligned} a_x &= -R\,\omega_2\cos\theta - R\varepsilon\sin\theta, \\ a_y &= -R\,\omega_2\sin\theta + R\varepsilon\cos\theta, \\ a_z &= 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Modulul acceleraţiei este:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(R^2\omega^2\cos\theta + R\varepsilon\sin\theta)^2 + (R\varepsilon\cos\theta - R\omega^2\sin\theta)^2} =$$

$$= R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{6.20}$$

În tehnică prezintă interes şi componentele acceleraţiei punctului M pe tangentă şi normala la traiectoria punctului.

Pentru a le determina, vom proiecta acceleraţia punctului M pe raza OM şi pe tangenta Mt la cerc în punctul M. Dacă observăm că proiecţia acceleraţiei punctului M pe tangenta Mt'-

şi pe raza OM este egală cu suma proiecţiilor celor două componente a_x şi a_y pe aceste axe, rezultă că avem (fig. 6.9):

$$a_n = a_x \cos\theta + a_y \sin\theta,$$
$$a_t = a_y \cos\theta - a_x \sin\theta, \tag{6.21}$$

Introducînd în aceste formule valorile lui a_x şi a_y date de formulele (6.19) şi efectuînd toate calculele se obţine:

$$a_n = -R\omega^2,$$
$$a_t = R\varepsilon. \tag{6.22}$$

Semnul minus din expresia acceleraţiei a_n ne arată că ea este îndreptată totdeauna de la M către O; acceleraţia a_t este îndreptată ca în figura (6.10) dacă $\ddot{\theta}$ este pozitiv, sau în sens contrar dacă $\ddot{\theta}$ este negativ.

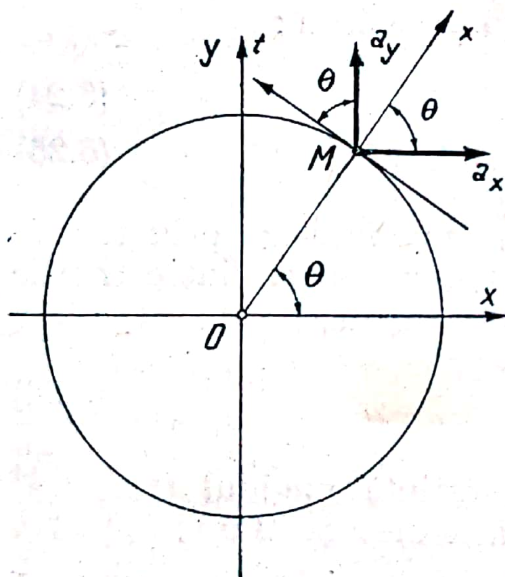


Fig. 6.9.

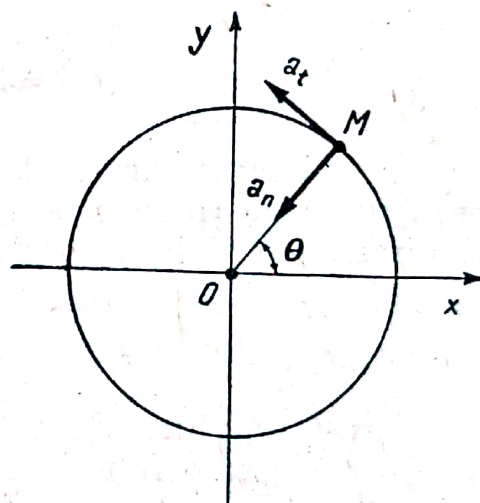


Fig. 6.10.

Dacă vom desena vectorii acceleraţiei aşa cum se arată în figura 6.10, vom putea scrie neţinînd seama de semn:

$$a_n = R\omega^2,$$
$$a_t = R\varepsilon. \tag{6.23}$$

Pînă acum nu ne-am preocupat de forma funcţiei $\theta = \theta(t)$, adică de felul în care se mişcă raza OM; vom considera în cele ce urmează trei cazuri, şi anume:

— cazul cînd unghiul θ variază proporţional cu timpul; punctul M efectuează o mişcare uniformă pe cerc în acelaşi sens;

— cazul cînd unghiul θ variază proporţional cu pătratul timpului; punctul M se mişcă pe cerc din ce în ce mai repede

sau din ce în ce mai încet (uniform accelerat sau uniform întîrziat);

— cazul cînd unghiul θ variază periodic; punctul M are o mişcare de du-te-vino pe un arc de cerc.

Cazul I. Funcţia $\theta(t)$, care reprezintă unghiul razei OM cu axa Ox, este o funcţie liniară de timp; mişcarea punctului M se petrece astfel încît raza OM se roteşte unifom cu viteza unghiulară constantă ω pornind din poziţia iniţială $\theta=\theta_0$. Punctele manivelei unor motor cu ardere internă, punctele camelor de acţionare a mecanismelor din industria textilă, a încălţămintei, punctele centrifugelor utilizate în industria chimică, punctele situate pe braţele macaralelor turnante care transportă material dintr-un loc într-altul în construcţii execută, în perioada de regim, mişcări circulare uniforme. În acest caz, viteza unghiulară $\omega = \dot{\theta}$ este constantă şi acceleraţia unghiulară $\varepsilon=\ddot{\theta}$ este zero.

Înlocuind în relaţiile (6.18) şi (6.23) găsim:

$$v=R\,\omega, \tag{6.24}$$

$$a_n=R\,\omega^2; \quad a_t=0. \tag{6.25}$$

În mişcarea circulară uniformă, vom înţelege prin turaţie numărul n de rotiri complete efectuate pe minut. Între turaţie şi viteza unghiulară există relaţia:

$$\omega=\frac{\pi n}{30}. \tag{6.26}$$

Cazul II. Funcţia $\theta(t)$ care reprezintă unghiul razei OM cu axa Ox este o funcţie de gradul al doilea de timp; mişcarea punctului M se petrece astfel încît raza OM se roteşte din ce în ce mai repede sau din ce în ce mai încet cu acceleraţia unghiulară constantă ε, pornind din poziţia initială $\theta = \theta_0$ cu viteza unghiulară iniţială $\dot{\theta} = \omega_0$. Ca exemple de puncte care execută mişcări circulare uniform variate pot servi aceleaşi ca la cazul precedent, în perioada de demaraj sau de oprire.

În acest caz, viteza unghiulară ω variază proporţional cu timpul şi acceleraţia unghiulară ε este constantă:

$$\omega=\varepsilon_t+\omega_0 \qquad \varepsilon=\text{constant}, \tag{6.27}$$

cu care:

$$v=R(\varepsilon_t+\omega_0), \quad a_n=R(\varepsilon_t+\omega_0)^2, \; a_t=R\,\varepsilon. \tag{6.28}$$

Cazul III. Funcţia $\theta(t)$ care reprezintă unghiul razei OM cu axa Ox este o funcţie periodică de timp; mişcarea punctului M se petrece astfel încît raza OM execută o mişcare de du-te-vino pe cerc cu o amplitudine A mai mică, egală, sau mai mare decît aceea a unui cerc întreg. Asemenea mişcări descriu punctele corpurilor aflate în mişcare de rotaţie alternativă. Ca exemplu poate servi mişcarea punctelor de pe una dintre manivelele mecanismului de avans al ramei din industria încălţămintei, a punctelor de pe o roată dinţată în timpul şlefuirii lor la o maşină cu pietre înclinate sau a punctelor de pe manivelele şi culisele oscilante ale instalaţiilor din industria textilă.

Înlocuind expresiile lui θ şi ale derivatelor sale în relaţiile (6.18) şi (6.23) găsim:

$$\begin{aligned} \theta &= A \sin (kt+\varphi), \\ \omega &= Ak \cos (kt+\varphi), \\ \varepsilon &= -Ak^2 \sin (kt+\varphi), \end{aligned} \tag{6.29}$$

cu care:

$$\begin{aligned} v &= RkA \cos (kt+\varphi), \\ a_n &= RA^2k^2 \cos^2 (kt+\varphi) \\ a_t &= RAk^2 \sin (kt+\varphi). \end{aligned} \tag{6.30}$$

În acest caz, atît viteza unghiulară ω cît şi acceleraţia unghiulară ε variază periodic.

Observaţie. Vitezei unghiulare $\omega = \dot{\theta}$ şi acceleraţiei unghiulare $\varepsilon = \ddot{\theta}$ din mişcarea circulară li se pot da reprezentări vectoriale importante pentru studiul acestei mişcări. Astfel, viteza ungiulară $\omega = \dot{\theta}$ poate fi considerată ca vector alunecător cu direcţia perpendiculară pe planul cercului, cu originea O aleasă după voie pe această direcţie, cu sensul astfel ales încît rotirea pe cerc a mobilului să se facă de la dreapta spre stînga şi avînd mărimea $\omega = \dot{\theta}$ (fig. 6.11). Vectroul $\overline{\varepsilon}$ exprimă variaţia în timp a vectorului $\overline{\omega}$ (derivata vectorului $\overline{\omega}$) şi este situat pe aceeaşi direcţie, deoarece vectorul $\overline{\omega}$ păstrează direcţia constantă putîndu-i varia numai mărimea; vectorii $\overline{\omega}$ şi $\overline{\varepsilon}$ au acelaşi sens dacă mişcarea este accelerată (fig. 6.12) şi sensuri contrare dacă mişcarea este întîrziată.

Această reprezentare oferă posibilitatea ca viteza $\overline{v}$ şi acceleraţia tangenţială $\overline{a_t}$ a unui punct al solidului să poată fi considerate drept momentele vectorilor $\overline{\omega}$ şi $\overline{\varepsilon}$ în raport cu punctul respectiv.

Într-adevăr, vectorul $\bar{v}$ are toate caracteristicile vectorului moment din cazul forței:

— direcție perpendiculară pe planul format de punctul M și vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$;

— modul αd (d fiind distanța de la punctul mobil la suportul lui $\bar{a}$);

— sensul același ca în cazul momentului unei forțe;

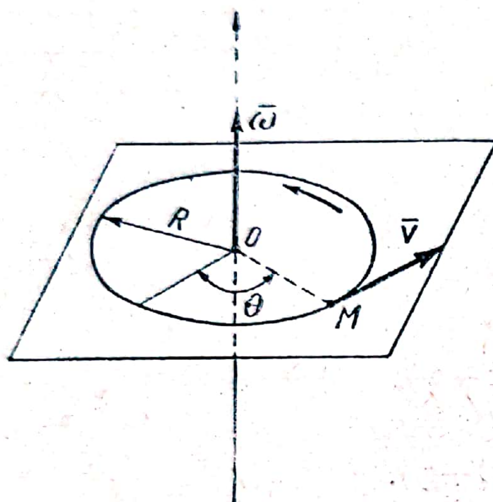


Fig. 6.11.

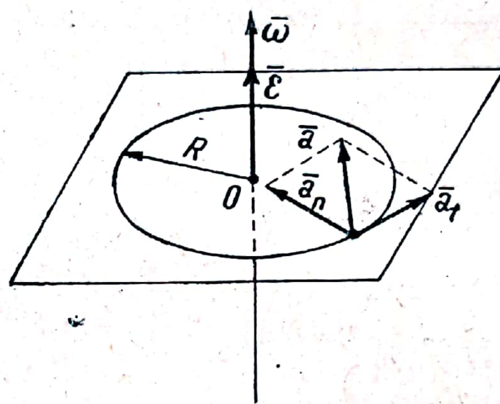


Fig. 6.12.

— punctul de aplicație în punctul mobil (punctul față de care se ia momentul).

d) **Mișcarea uniformă pe elice.** Să presupunem că punctul mobil M este un cursor care se deplasează pe o bară verticală sudată la rîndul său de un alt cursor M_1, care descrie o mișcare circulară în planul orizontal xOy (fig. 6.13).

Dacă cursorul M nu s-ar deplasa pe bara verticală, el ar descrie o mișcare circulară. Din cauza deplasării pe această bară, el descrie însă o elice trasată pe cilindrul circular ce are drept axă de simetrie axa Oz.

Dacă el se mișcă uniform pe bara verticală în timp ce cursorul M_1 se mișcă și el uniform pe cercul din planul xOy, coordonatele sale x și y vor fi aceleași ca ale punctului M_1 (mișcare circulară uniformă), iar coordonata z, în loc să fie nulă, va avea aceeași expresie ca în cazul mișcării rectilinii și uniforme:

$$x = R \cos \omega t,$$
$$y = R \sin \alpha t, \qquad (6.31)$$
$$z = kt,$$

unde am notat prin k viteza de deplasare a cursorului M pe bara verticală.

Rezultă că punctul M descrie o elice pe cilindrul circular drept, avînd drept axă axa Oz; după cum am văzut, mişcarea aceasta este o combinaţie formată dintr-o mişcare circulară uniformă şi o mişcare rectilinie uniformă.

Să presupunem că în timpul în care proiecţia punctului mobil pe planul xOy parcurge o singură dată cercul din acest

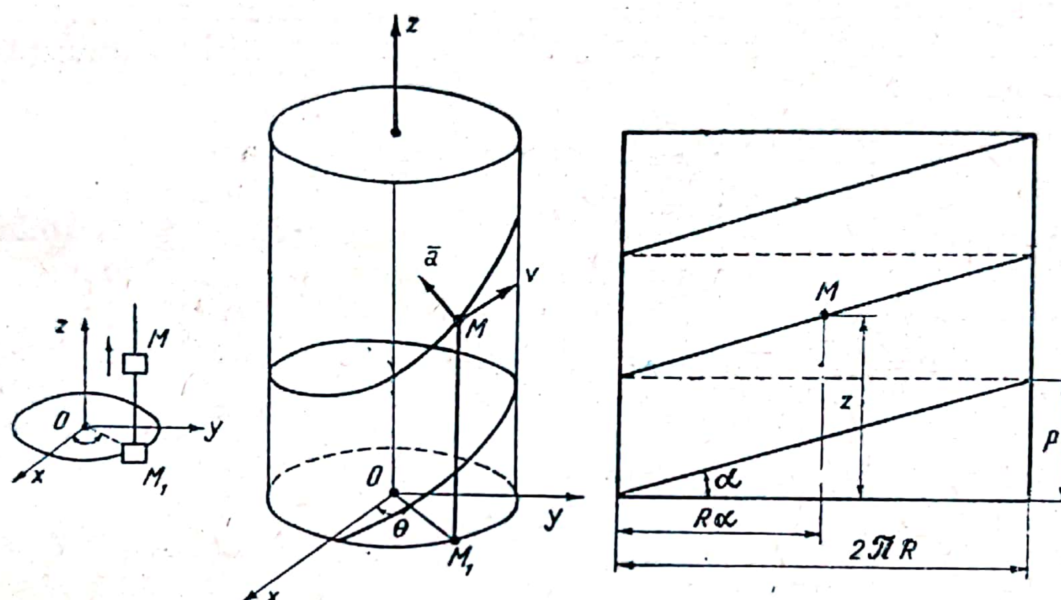


Fig. 6.13.

plan, punctul înaintează pe verticală cu cantitatea p, denumită *pasul elicei*. Viteza de rotire a razei OM_1 este ω (fig. 6.13); mişcarea fiind uniformă ($\theta = \omega t$), vom găsi timpul T necesar parcurgerii o dată a cercului de bază al cilindrului din relaţia:

$$t = \frac{\theta}{\omega}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{6.32}$$

În acest timp, punctul mobil urcă pe generatoarea cilindrului cu distanţa p; înlocuind în ultima ecuaţie $z = p$ şi $t = T$, obţinem:

$$p = k\frac{2\pi}{\omega}, \tag{6.33}$$

de unde rezultă valoarea vitezei constante k:

$$k = \frac{p\omega}{2\pi}. \tag{6.34}$$

Dacă vom desfăşura cilindrul pe care se mişcă punctul, vom obţine un dreptunghi pe care sînt trasate mai multe drepte, în-

clinate față de cele două baze cu un același unghi α; distanța între aceste drepte măsurată pe generatoare este p. Din figura 6.13 rezultă :

$$p = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha, \tag{6.35}$$

cu care :

$$k = R\omega \operatorname{tg} \alpha. \tag{6.36}$$

Componentele vitezei și accelerației pe axele sistemului de referință $Oxyz$ sînt aceleași ca la mișcarea circulară uniformă (pentru v_x și v_y), sau aceeași ca la mișcarea rectilinie uniformă (pentru v_z) :

$$\begin{aligned} v_x &= -R\omega \sin \omega t, \\ v_y &= R\omega \cos \omega t, \\ v_z &= \frac{p\omega}{2\pi} = R\omega \operatorname{tg} \theta, \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$v = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2+p^2} = R\omega\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{R\omega}{\cos\alpha}, \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned} a_x &= -R\omega^2 \cos \omega t, \\ a_y &= -R\omega^2 \sin \omega t, \\ a_z &= 0, \end{aligned} \tag{6.39}$$

$$a = R\omega^2. \tag{6.40}$$

Componentele accelerației pe tangenta și normala la traiectorie sînt :

$$a_n = R\omega^2, \ a_t = 0. \tag{6.41}$$

2. Cinematica solidului rigid

Studiul mișcării solidului rigid prezintă o importanță deosebită pentru tehnică, deoarece cea mai mare parte a organelor mobile ale diferitelor mașini și instalații pot fi considerate solide rigide; cunoașterea modului în care se determină mișcarea unui solid rigid este importantă atît pentru exploatarea mașinilor și instalațiilor care au în componența lor organe mobile, cît și pentru proiectarea de noi mașini care să funcționeze cu viteze din ce în ce mai mari, dînd o producție și o productivivitate sporită față de mașinile mai vechi care funcționează în

general cu viteze mai reduse. Astfel, este cunoscută importanța măririi vitezei de lucru a mașinilor din industria textilă; trebuie observat însă că acest fapt este imposibil de realizat fără o cunoaștere temeinică în primul rînd a cinematicii mașinii respective, fapt care implică în mod necesar cunoștințe de cinematica solidului rigid.

Mișcarea unui solid rigid este în general mult mai complicată decît aceea a unui punct material; astfel, dacă ne închipuim din punct de vedere geometric că solidul rigid este alcătuit dintr-o infinitate de puncte materiale, observăm imediat că trebuie să studiem simultan mișcarea tuturor acestor puncte. Mișcările pe care le execută aceste puncte sînt foarte diferite între ele; astfel, cele două extremități ale unei biele aparținînd unui mecanism bielă-manivelă execută una o mișcare circulară (butonul de manivelă), iar cealaltă o mișcare rectilinie (bolțul pistonului), în timp ce restul punctelor bielei execută mișcări pe niște curbe închise, avînd forme destul de complicate. Unele puncte au viteze și accelerații mai mari sau mai mici decît altele. Se poate întîmpla chiar ca o parte din punctele unui solid să se afle în repaus, fără ca întreg solidul să fie în repaus; astfel, punctele de pe axa unui cilindru aflat în mișcare de rotație vor rămîne mereu fixe, oricît de repede s-ar roti cilindrul.

Aceste cîteva observații scot în evidență complexitatea problemei cinematicii solidului rigid în raport cu cea a punctului material.

Dacă am generaliza definiția privind determinarea mișcării punctului material, ar trebui să spunem că *vom considera determinată mișcarea unui solid rigid atunci cînd vom cunoaște mișcarea fiecărui punct al său* (*traiectoria, viteza și accelerația*). Această formulare a determinării mișcării solidului rigid este însă imposibil de aplicat în probleme practice; de aceea o vom înlocui cu următoarea: *vom considera determinată mișcarea unui solid rigid atunci cînd vom cunoaște mișcarea unui punct oarecare* (*traiectorie, viteză, accelerație*) *aparținînd solidului considerat.* După aceleași reguli după care s-a determinat mișcarea unui punct oarecare se poate determina și mișcarea oricărui alt punct al solidului.

În cele ce urmează, preocuparea cea mai importantă va consta în determinarea ultimelor două caracteristici ale mișcării „punctului oarecare" al solidului considerat (viteze și accelerații), precum și a mărimilor cinematice de care depind acestea; problema determinării traiectoriei se va trata numai la aplicații.

Un rol deosebit de important în studiul cinamaticii solidului rigid îl formează aşa-numita *distribuţie de viteze şi acceleraţii*, care reprezintă totalitatea vectorilor viteză şi acceleraţie ai punctelor solidului, la un moment dat, aplicaţi în punctele respective.

a) **Determinarea poziţiei unui solid rigid**. Am arătat în capitolul I că poziţia oricărui corp în spaţiu faţă de un sistem de referinţă fix (adică faţă de un alt corp considerat fix, pe care îl considerăm ca un sistem de referinţă fix $Oxyz$) poate fi determinată cu ajutorul unor mărimi geometrice (unghiuri sau distanţe), în timp ce poziţia unui punct faţa de un sistem de referinţă se determină cu ajutorul a trei numere, coordonatele sale x, y şi z. Atît mărimile geometrice care determină poziţia unui corp mobil cît şi coordonatele unui punct mobil sînt funcţii de timp.

Să fixăm acum un sistem de referinţă şi pe corpul aflat în mişcare; acest sistem se va mişca o dată cu corpul mobil. Un punct al corpului mobil va avea două feluri de coordonate, unele faţă de sistemul de referinţă fix, care sînt funcţii de timp deoarece faţă de acest sistem punctul considerat este mobil, şi altele faţă de sistemul de referinţă, care se mişcă o dată cu corpul mobil. Aceste coordonate nu mai sînt însă funcţii de timp, ci sînt nişte numere constante, deoarece punctul considerat se mişcă o dată cu corpul şi deci o dată cu sistemul de referinţă fixat pe corpul mobil (fig. 6.14).

Astfel, dacă la mecanismul bielă-manivelă al unui motor vom alege drept corp mobil pistonul şi drept punct mobil un punct de pe piston şi vom lua drept sistem de referinţă fix batiul motorului şi drept sistem de referinţă mobil pistonul, orice punct de pe piston va avea două feluri de coordonate: unele funcţii de timp faţă de batiu (sistemul fix) şi altele constante faţă de piston (sistemul mobil legat de piston).

b) **Mişcarea de translaţie**. Mişcarea de translaţie este una dintre mişcările simple ale solidului rigid. *Vom spune că un solid rigid are o mişcare de translaţie dacă un segment oarecare de pe solid rămîne în tot timpul mişcării paralel cu el însuşi.* Asemenea mişcări au culisele mecanismelor, sania unui strung, sertarul unei mese etc.

Grade de libertate. Coordonatele unui punct. Un solid rigid liber aflat în mişcare de translaţie în spaţiu are trei grade de libertate; în adevăr, deoarece un segment AB oarecare al solidului trebuie să rămînă paralel cu el însuşi în tot timpul mişcării, rezultă că întreg corpul trebuie să rămînă „paralel” cu el însusi în tot timpul mişcării. Aceasta înseamnă că pentru a

determina poziţia corpului considerat în spaţiu este suficient să cunoaştem poziţia numai a unui singur punct al său. După cum am văzut însă, poziţia unui punct liber în spaţiu poate fi deter-

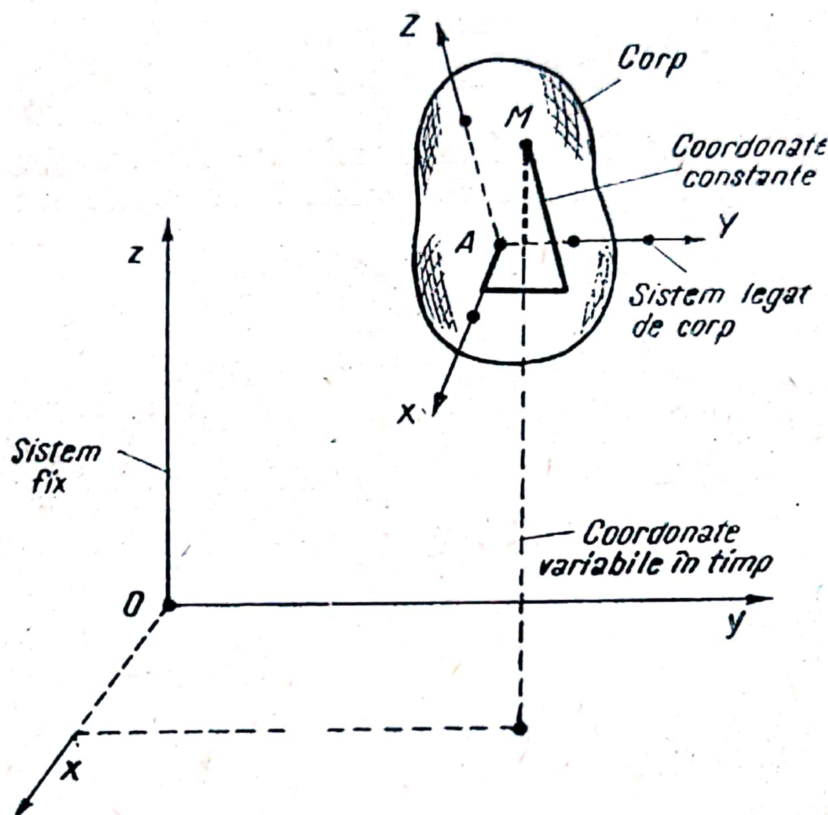


Fig. 6.14.

minată prin trei mărimi geometrice : coordonatele sale faţă de un sistem fix ; aceleaşi trei mărimi determină şi poziţia solidului aflat în mişcare de translaţie.

Un solid aflat în mişcare de translaţie poate avea însă şi numai două sau chiar un singur grad de libertate, în cazul în care nu este liber ci este obligat să rămînă în contact cu alte corpuri.

Pentru determinarea coordonatele unui punct al solidului, vom alege două sisteme de axe : unul $AXYZ$, legat solidar cu corpul în mişcare, şi un alt sistem $Oxyz$, fix. Pentru simplificare, axele celor două sisteme vor fi alese paralele între ele. Un punct M a solidului are coordonatele constante X, Y, Z faţă de sistemul $AXYZ$ şi coordonatele variabile x, y, z faţă

Br. 2—54

de sistemul fix $Oxyz$. Coordonatele punctului A față de sistemul $Oxyz$ sînt x_0, y_0, z_0. Din figura 6.15 rezultă :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X, \\ y &= y_0 + Y, \\ z &= z_0 + Z. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Analiza traiectoriilor. Într-o mișcare de translație, punctele solidului pot descrie curbe oricît de complicate ; ceea ce

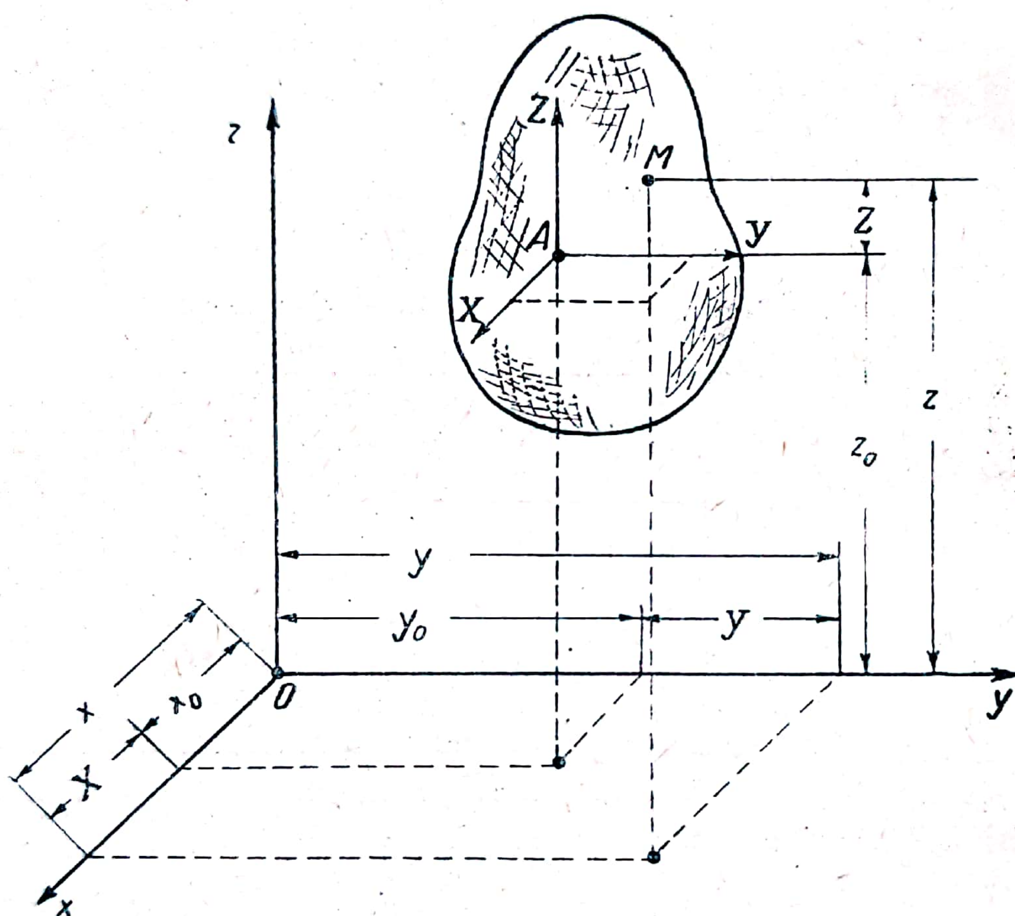


Fig. 6.15.

constituie însă caracteristica de bază a acestei mișcări este faptul că *traiectoriile tuturor punctelor solidului sînt curbe identice, paralele între ele*. Ca exemplu de mișcări de translație ale unui solid rigid cităm :

Translații rectilinii (toate punctele solidului descriu linii drepte) : mișcarea sertarului unei mese, mișcarea caroseriei unui vechiul care se deplasează pe un drum rectiliniu, mișcarea cabinei unui ascensor, mișcarea pistonului unui motor în inte-

riorul cilindrului, mişcarea unui manşon care culisează în lungul unui arbore canelat etc. :

Translaţii circulare (toate punctele solidului descriu cercuri de aceeaşi rază, avînd însă centre diferite) : mişcarea bielei de cuplare a două roţi avînd axele de rotaţie fixe, mişcarea scaunelor unui scrînciob etc.

Translaţii curbilinii oarecare (toate punctele solidului descriu curbe în spaţiu avînd o formă oarecare, paralele între ele) : biela de cuplare a roţilor de la locomotivă, pedala de acţionare a unei biciclete etc.

Translaţia curbilinie oarecare reprezintă cel mai general caz de translaţie, întrucît în ea sînt incluse drept cazuri particulare cele două translaţii menţionate mai sus (translaţie rectilinie şi circulară).

Analiza vitezelor. Proiecţiile vitezelor unui punct al solidului pe axele Ox, Oy şi Oz se obţin prin derivarea coordonatelor punctului M (6.42) :

$$v_x = v_{ox},\quad v_y = v_{oy},\quad v_z = v_{oz}, \tag{6.43}$$

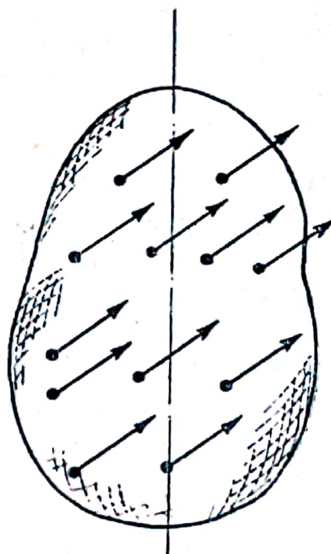


Fig. 6.16.

deoarece coordonatele X, Y, Z fiind constante au derivatele nule.

În figura 6.16 este arătată repartiţia vitezelor la un moment dat în punctele unui solid aflat în mişcare de translaţie, iar în figura 6.17 este arătat modul în care variază viteza unui singur punct al solidului pe care îl urmărim în timpul mişcării.

Analiza acceleraţiilor. Dacă derivăm relaţiile (6.43), vom obţine proiecţiile acceleraţiei unui punct al corpului pe axele Ox, Oy, Oz :

$$a_x = a_{ox},\quad a_y = a_{oy},\quad a_z = a_{oz}. \tag{6.44}$$

Trebuie remarcat faptul că acceleraţiile punctelor solidului pot varia de la un moment la altul, dar la acelaşi moment toate punctele au aceeaşi acceleraţie.

În cazul particular al mişcării de translaţie rectilinie şi uniformă a solidului rigid, acceleraţiile tuturor punctelor solidului sînt nule.

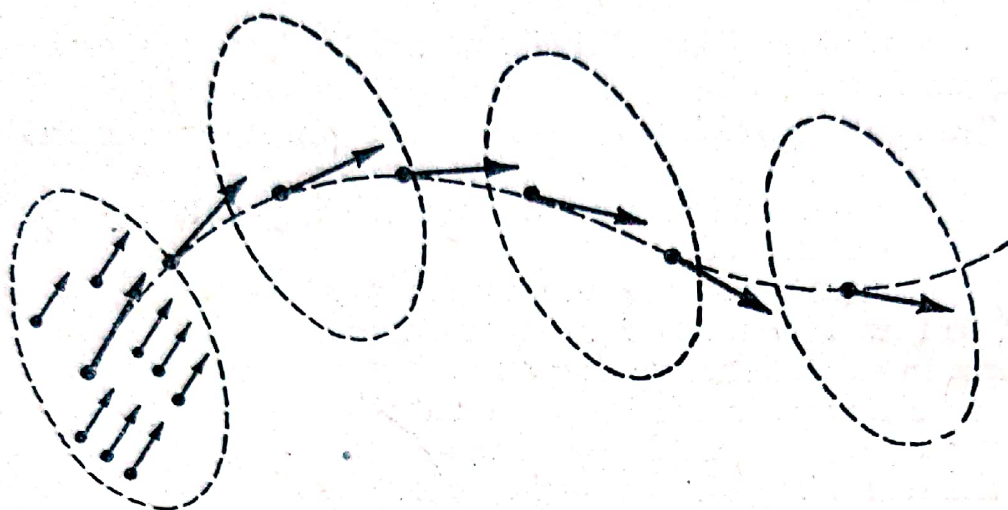


Fig. 6.17.

În figura 6.18 este arătată repartiţia acceleraţiilor la un moment dat în punctele unui solid rigid aflat în mişcare de translaţie, iar în figura 6.19 este arătat modul în care variază acceleraţia unui punct al solidului pe care îl urmărim în timpul mişcării.

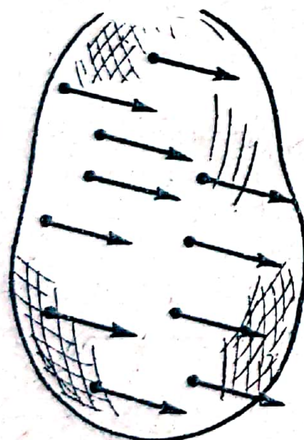


Fig. 6.18.

În concluzie, rezultă că într-o mişcare de translaţie, mişcarea tuturor punctelor solidului este aceeaşi cu mişcarea unui singur punct al său.

c) **Mişcarea de rotaţie.** O altă mişcare simplă a solidului rigid este mişcarea de rotaţie. *Vom spune că un solid rigid are o mişcare de rotaţie dacă în tot timpul mişcării două puncte ale sale rămîn fixe în spaţiu.* În acest caz, după cum se poate constata pe cale geometrică, toate punctele rigidului care aparţin dreptei ce uneşte cele două puncte fixe rămîn de asemenea fixe; această dreaptă se numeşte *axa de rotaţie* a rigidului considerat.

Ca exemple de mişcări de rotaţie ale unui solid rigid cităm: mişcarea tuturor pieselor care alcătuiesc o maşină sau un mecanism şi ale căror axe sînt fixe faţă de batiul maşinii respective (roţi dinţate, mandrina păpuşii de la strung, scula pre-

lucrătoare de la freză, platforma unui strung carusel), mişcarea acelor unui ceasornic în raport cu cadranul, mişcarea Pămîntului în jurul axei polilor, dacă nu se ţine seama de mişcarea sa în jurul Soarelui etc.

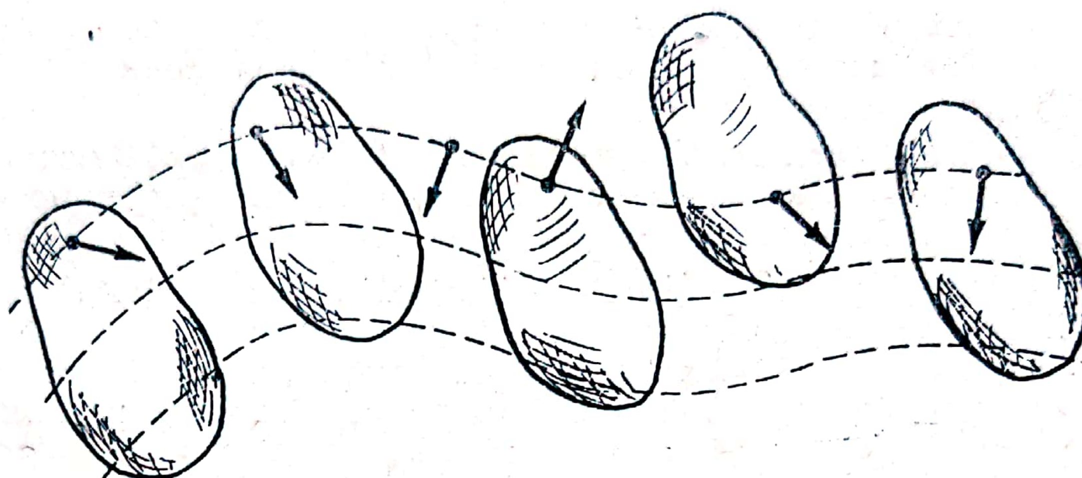


Fig. 6.19.

Grade de libertate. Un solid rigid aflat în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe are un singur grad de libertate, deoarece poziţia sa la un moment dat poate fi caracterizată printr-o singură mărime geometrică : unghiul diedru pe care-l face un plan fix în spaţiu, care trece prin axa de rotaţie, cu un alt plan solidar cu rigidul considerat şi care conţine de asemenea axa de rotaţie. În timpul mişcării solidului, acest unghi este funcţie de timp.

Analiza traiectoriilor. Pe cale geometrică rezultă că toate punctele unui solid rigid aflat în mişcare de rotaţie descriu cercuri situate în plane perpendiculare pe axa de rotaţie şi avînd centrele pe această axă, afară de punctele de pe axa de rotaţie care rămîn fixe. Razele cercurilor sînt egale cu depărtările punctelor faţă de axă ; punctele de pe axa de rotaţie descriu cercuri de raze nule, adică sînt fixe. Cu alte cuvinte, *punctele unui solid rigid aflat în mişcare de rotaţie descriu mişcări circulare.*

Analiza vitezelor. Deoarece toate punctele unui solid aflat în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe descriu mişcari circulare cu aceeaşi viteză unghiulară ω în plane perpendiculare pe axa de rotaţie, cercurile avînd raze variabile, rezultă că la un moment dat toate punctele solidului au viteza

$$v = R\omega,$$

R fiind raza cercului pe care se mişcă.

De aci putem trage următoarele concluzii în cea ce privește modul în care sînt repartizate vitezele la un moment dat în diferitele puncte ale unui solid rigid aflat în mișcare de rotație :

— vitezele tuturor punctelor solidului sînt perpendiculare pe axa de rotație, deci nu au componente în lungul acestei axe ;

— toate punctele situate în lungul unei drepte AB paralele cu axa de rotație au aceeași viteză, orientată perpendicular pe această dreaptă ;

— toate punctele situate în lungul unei drepte AB care întîlnește perpendicular axa de rotație au vitezele perpendiculare pe această dreaptă, mărimile lor variind proporțional cu distanțele punctelor la axa de rotație ;

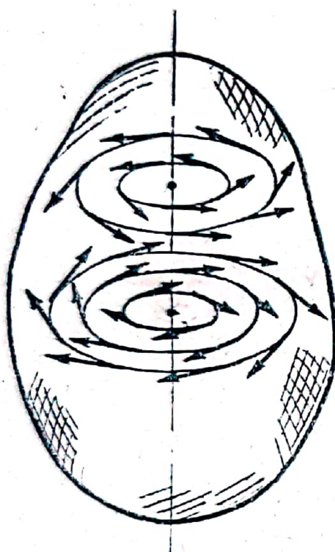


Fig. 6.20.

— singurele puncte care au viteză nulă sînt cele situate pe axa de rotație ; pentru aceste puncte raza $R = 0$ și deci $v = 0$.

În figura 6.20 este arătată repartiția vitezelor la un moment dat în punctele unui solid aflat în mișcare de rotație.

Diagrama de viteze în mișcarea de rotație. Viteza unui punct al solidului aflat în mișcare de rotație uniformă se poate exprima în funcție de turația n și de diametrul D al cercului descris de punct prin relația :

$$v = \frac{\pi D n}{60} = \frac{\pi n}{60} D = kD, \qquad (6.45)$$

unde s-a notat prin k raportul $\frac{\pi n}{60}$.

Această relație poate fi reprezentată într-o diagramă avînd în ordonată viteza v și în abscisă diametrul D. Pentru diferite valori ale lui k diagrama este constituită dintr-o serie de drepte trecînd prin originea O și înclinate diferit. Asemenea diagrame sînt utilizate în metalurgia prelucrătoare la mașinile-unelte care au turații variabile (de exemplu la freze) ; cu ajutorul lor se poate alege turația sculei în funcție de materialul ce trebuie prelucrat. În figura 6.21 este arătată o asemenea diagramă folosită la freze.

Analiza accelerațiilor. Accelerațiile punctelor unui solid aflat în mișcare de rotație se află cu formulele de la mișcarea circulară, în care ω este viteza unghiulară a solidului, iar ε accelerația sa unghiulară.

Accelerația fiecărui punct al solidului are două componente, una normală și alta tangențială; ele sînt date de formulele:

$$a_n = R\,\omega^2, \qquad a_t = R\varepsilon. \tag{6.46}$$

în care R este raza cercului descris de punctul considerat.

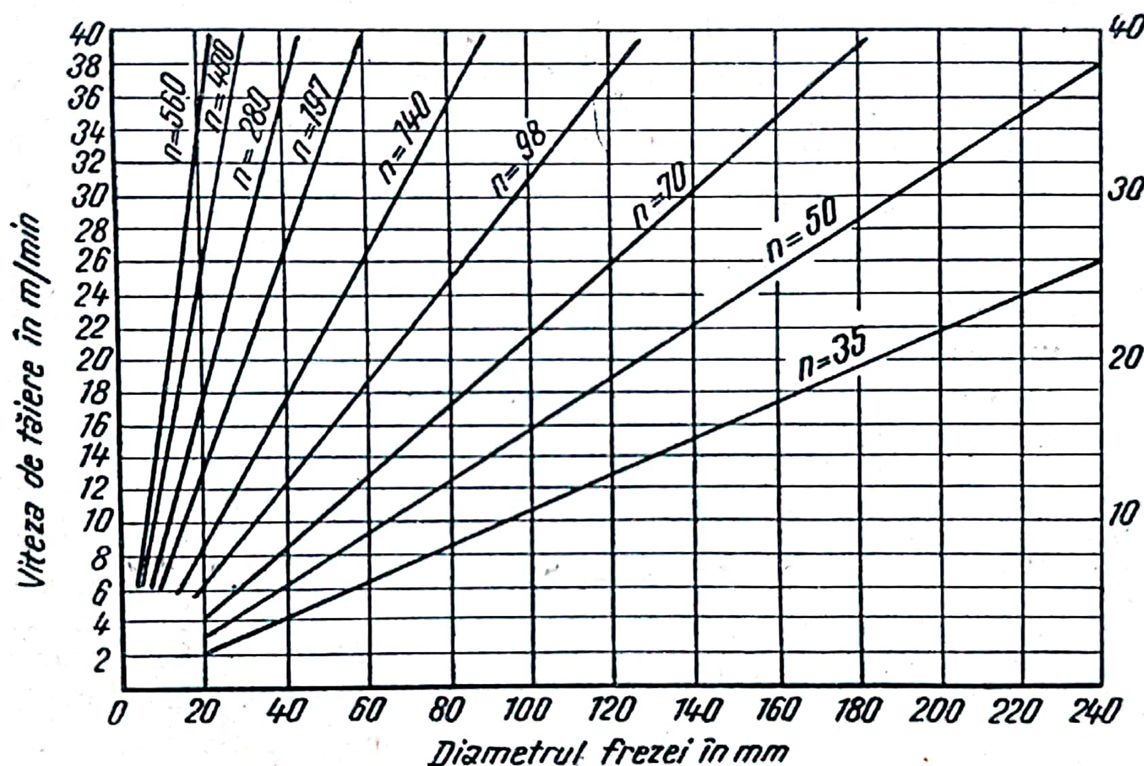


Fig. 6.21.

Accelerația rezultantă are modulul:

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{6.47}$$

și este înclinată față de accelerația normală cu unghiul φ dat de relația

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R\varepsilon}{R\,\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{6.48}$$

În figura 6.22 este arătată repartiția accelerațiilor la un moment dat în punctele unui solid aflat în mișcare de rotație.

La un moment dat accelerațiile punctelor solidului aflat în mişcare de rotație sînt repartizate astfel :

— accelerațiile tuturor punctelor solidului sînt perpendiculare pe axa de rotație, deci nu au componente în lungul acestei axe ; în cazul particular al mişcării de rotație uniforme, suporturile accelerațiilor sînt concurente cu axa de rotație ;

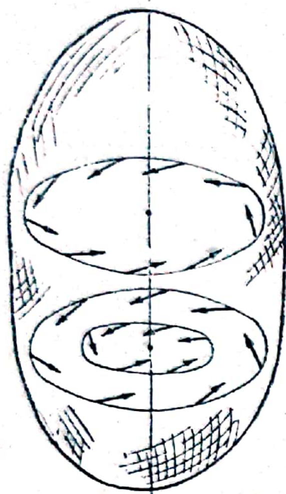


Fig. 6.22.

— toate punctele situate în lungul unei drepte paralele cu axa de rotație au aceeaşi accelerație, orientată perpendicular pe această dreaptă ;

— toate punctele situate în lungul unei drepte ce întîlneşte perpendicular axa de rotație au accelerațiile egal înclinate față de această dreaptă, mărimile lor variind proporțional cu distanțele punctelor la axa de rotație ;

— singurele puncte de accelerație nulă sînt cele situate pe axa de rotație ; aceste puncte au $R = 0$ şi $a = 0$.

d) **Mişcarea elicoidală.** Mişcarea elicoidală constituie un caz mai complex de mişcare a unui solid rigid decît cele studiate pînă acum (translația şi rotația). *Vom spune că un solid rigid are o mişcare elicoidală dacă în timpul mişcării el se roteşte în jurul unei drepte fixe şi alunecă în lungul aceleiaşi drepte.* Această dreaptă se numeşte *axa mişcării elicoidale.* Putem spune deci că mişcarea elicoidală este o mişcare compusă dintr-o translație şi o rotație.

Ca exemple de mişcări elicoidale ale unui solid rigid citām : mişcarea unui corp care în timp ce cade pe verticală se roteşte în jurul verticalei, mişcarea elicei unui avion în timpul zborului, mişcarea burghiului unei maşini de găurit în timp ce prelucrează o piesă.

În timpul mişcării elicoidale se poate întîmpla ca axa mişcării să rămînă aceeaşi sau să se schimbe de la un moment dat la altul ; astfel, în timpul mişcării rectilinii a unui avion, axa mişcării elicoidale a elicei rămîne mereu aceeaşi spre deosebire de cazul în care avionul execută o mişcare curbilinie, cînd această axă se schimbă de la un moment la altul.

Un caz particular de mişcare elicoidală care intervine foarte des în practică este acela al mişcării de şurub. *Vom spune că un solid rigid are o mişcare de şurub dacă el execută o mişcare*

elicoidală pentru care există un raport constant între unghiul de rotire în jurul axei mişcării elicoidale şi distanţa cu care solidul înaintează în lungul acestei axe. Ca exemplu de mişcare de şurub putem cita mişcarea de înaintare a şurubului într-o piuliţă; după cîte se ştie, în acest caz există un raport constant între unghiul de rotire şi distanţa de înaintare de-a lungul axei, raport impus de filetul şurubului, în timp ce la mişcarea elicei nu există un asemenea raport constant; înainte de pornire, elicea se roteşte fără să înainteze în lungul axei sale; după ce porneşte, mişcarea în lungul axei se face din ce în ce mai repede pînă ce ajunge la viteza de înaintare de regim.

Remarcăm că şi în cazul mişcării de şurub axa mişcării poate să rămînă fixă sau se poate schimba de la un moment la altul.

Grade de libertate. Un solid aflat în mişcare elicoidală astfel încît axa mişcării sale este fixă are două grade de libertate, deoarece poziţia sa la un moment dat poate fi caracterizată prin două mărimi geometrice: unghiul de rotire în jurul axei şi distanţa cu care el înaintează în lungul acestei axe. Aceste două mărimi depind de timp atunci cînd solidul execută mişcarea elicoidală.

Analiza traiectoriilor. După cum se poate constata uşor pe cale geometrică, punctele unui solid aflat în mişcare elicoidală, axa mişcării fiind fixă, descriu elici de pas variabil, situate pe un cilindru circular, cu excepţia punctelor de pe axă, care descriu această axă. În cazul mişcării de şurub elicele au pasul constant.

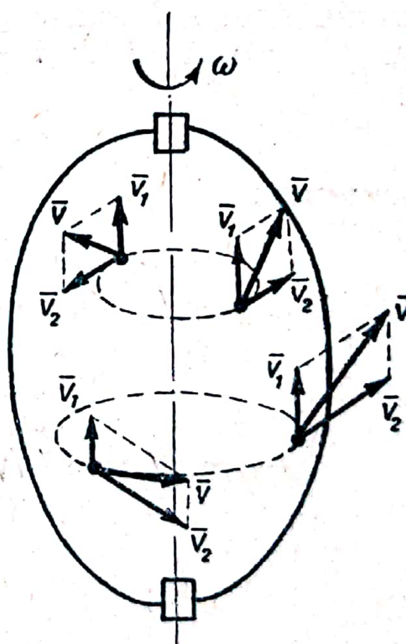


Fig. 6.23.

Analiza vitezelor. Deoarece mişcarea elicoidală a solidului este rezultatul compunerii unei mişcări de translaţie în lungul axei mişcării elicoidale şi a unei mişcări de rotaţie în jurul aceleiaşi axe, toate punctele solidului vor avea două viteze:

— o viteză de translaţie v_1, aceeaşi pentru toate punctele, şi

— o viteză de rotaţie $v_2 = R\omega$, care se află după regula de aflare a vitezelor din cazul mişcării de rotaţie. Viteza rezultantă

se obține prin adunarea vectorială a celor două viteze (fig. 6.23); ea are modulul:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{v_1^2 + R^2 \omega^2}, \tag{6.49}$$

deoarece vitezele v_1 și v_2 sînt perpendiculare între ele în orice punct al solidului.

Cazul mișcării de șurub uniforme. Acest caz de mișcare, întîlnit foarte frecvent în tehnică, este caracterizat printr-un raport constant între drumul parcurs de-a lungul axei mișcării și unghiul cu care s-a rotit solidul în timpul parcurgerii acestui drum. În adevăr, dacă șurubul care înaintează într-o piuliță nu ar avea pasul constant, el nu ar putea executa mișcarea.

Dacă vom nota prin μ respectiv θ distanța de înaintare a solidului și unghiul de rotire în jurul axei mișcării măsurate de la o aceeași origine (pentru $\mu = 0$, $\theta = 0$) pentru mișcarea uniformă de șurub vom avea:

$$\mu = k\theta, \tag{6.50}$$

k fiind o constantă oarecare. Pentru a-i găsi valoarea, să presupunem că solidul s-a rotit cu un unghi $\theta = 2\pi$, parcurgînd în lungul axei o distanță pe care o vom denumi pas și o vom nota cu p; înlocuind mai sus găsim:

$$p = k 2\pi, \tag{6.51}$$

de unde:

$$k = \frac{p}{2\pi} \tag{6.52}$$

și deci:

$$\mu = \frac{p}{2\pi}\theta. \tag{6.53}$$

Prin derivare găsim:

$$\dot{\mu} = v_1 = \frac{p}{2\pi}\dot{\theta} = \frac{p}{2\pi}\omega \tag{6.54}$$

ω fiind viteza unghiulară de rotație constantă, mișcarea fiind uniformă.

Modulul vitezei unui punct (formula 6.49) devine:

$$v = \sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2}\omega^2 + R^2\omega^2} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{p^2 + 4\pi^2 R^2}. \tag{6.55}$$

Analiza accelerațiilor. Accelerația unui punct al unui solid aflat în mișcare elicoidală este de asemenea rezultatul compunerii accelerației din mișcarea de rotație în cea din mișcarea de translație. Ea va avea deci trei componente:

— o componentă normală $R\omega$ rezultată din mișcarea de rotație;

— o componentă tangențială $R\varepsilon$, rezultată tot din mișcarea de rotație;

— o componentă a_1 în lungul axei mișcării elicoidale, rezultată din translația în jurul acestei axe.

Accelerația rezultantă se obține prin adunarea vectorială a celor trei accelerații (fig. 6.24); ea este diagonala paralelipipedului avînd drept laturi cele trei accelerații:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2 + a_1^2} = \sqrt{R^2(\omega^4 + \varepsilon^2) + a_1^2} \quad (6.56)$$

În cazul mișcării uniforme de șurub, avem $a_1 = \varepsilon = 0$ și deci:

$$a = R\omega^2, \quad (6.57)$$

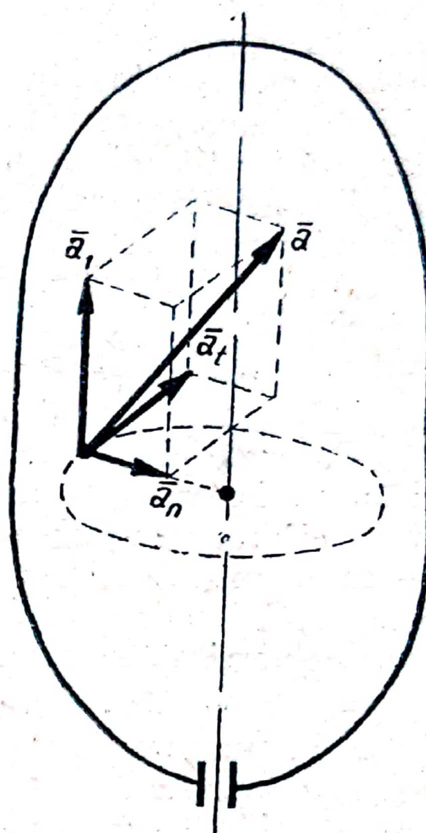


Fig. 6.24.

adică toate punctele solidului au numai accelerația normală din cazul mișcării de rotație.

e) **Mișcarea plan-paralelă**. Să considerăm mișcarea de rostogolire a unui cilindru pe un plan fix. În acest caz de mișcare, ne putem da seama ușor că toate punctele care se află pe o aceeași dreaptă paralelă cu axa cilindrului descriu aceeași mișcare; spre exemplu, punctele axei cilindrului descriu toate linii drepte. Această axă formează osia roții unui vehicul. Dacă vom secționa cilindrul cu plane perpendiculare pe axa sa, vom constata că punctele corespunzătoare din aceste plane situate pe paralele la axa cilindrului descriu aceleași mișcări. Toate aceste secțiuni ale cilindrului rămîn în tot timpul mișcării paralele cu un plan fix, perpendicular pe axa cilindrului. Acest caz de mișcare este denumit *mișcare plan-paralelă*.

Vom spune că un solid rigid execută o mișcare plan-paralelă dacă în tot timpul mișcării sale un plan aparținînd solidului alunecă pe un plan fix din spațiu. Este ușor de văzut că planul

fix din spaţiu ni-l putem imagina ca fiind chiar în contact cu planul legat de solid. Faţă de planul fix, solidul poate executa numai mişcări de translaţie după orice direcţie cuprinsă în acest plan şi o mişcare de rotaţie în raport cu orice axă perpendiculară pe acest plan; el nu poate executa mişcări de translaţie pe direcţii necuprinse în planul fix şi nici mişcări de rotaţie faţă de axe cuprinse în acest plan. De aci rezultă imediat deosebirile şi asemănările dintre mişcarea elicoidală şi mişcarea plan-paralelă: atît mişcarea elicoidală cît şi mişcarea plan-paralelă pot fi considerate ca fiind compuse dintr-o mişcare de translaţie şi o mişcare de rotaţie; deosebirea dintre ele constă în aceea că, pe cînd în cazul mişcării elicoidale direcţia mişcării de translaţie coincide cu axa mişcării de rotaţie, în cazul mişcării plan-paralele direcţia mişcării de translaţie este perpensiculară pe axa mişcării de rotaţie.

Ca exemple de mişcări plan-paralele ale unui solid rigid cităm: mişcarea roţii unui vehicul care se deplasează în translaţie rectilinie, mişcarea bielei unui mecanism bielă-manivelă, mişcarea unei scări care cade în timp ce se reazemă pe un perete vertical şi pe podea, mişcarea unui corp care în timp ce cade pe verticală se roteşte în jurul unei axe orizontale etc.

Mişcarea plan-paralelă fiind o mişcare compusă se va reduce, în anumite cazuri particulare, la mişcarea de translaţie sau la mişcarea de rotaţie; într-adevăr, orice mişcare de translaţie rectilinie constituie un caz particular de mişcare plan-paralelă; chiar şi translaţiile curbilinii la care traiectoriile descrise de punctele solidului sînt curbe plane constituie de asemenea cazuri particulare de mişcări plan-paralele. Mişcarea de rotaţie a solidului rigid în jurul unei axe fixe constituie de asemenea un caz particular de mişcare plan-paralelă, deoarece orice plan al solidului perpendicular pe axa de rotaţie rămîne în timpul mişcării acestuia paralel cu un plan fix din spaţiu.

Mişcarea plan-paralelă a unui solid rigid prezintă o particularitate care ne uşurează foarte mult studiul; am văzut, în cazul rostogolirii cilindrului, că toate punctele aflate pe o paralelă la axa sa, deci pe o perpendiculară la planul fix cu care rămîn paralele diferitele secţiuni efectuate în cilindru, execută mişcări identice. Această observaţie ne va permite ca în loc să studiem mişcarea tuturor punctelor solidului să studiem numai mişcarea unei figuri plane (intersecţia corpului cu planul fix din spaţiu). Pentru a determina mişcarea celorlalte puncte ale solidului, vom duce o serie de perpendiculare pe planul acestei secţiuni; mişcarea punctelor de pe aceste perpendiculare va fi identică cu mişcarea punctelor din planul secţiunii.

Grade de libertate. Coordonatele unui punct. Un solid aflat în mişcare plan-paralelă are trei grade de libertate deoarece poziţia sa la un moment dat poate fi caracterizată prin trei mărimi geometrice: două distanţe, reprezentînd coordonatele unui punct al solidului din planul său care se deplasează rămînînd în contact cu planul fix din spaţiu, şi unghiul dintre o dreaptă a aceluiaşi plan al solidului şi o altă dreaptă cuprinsă în planul fix din spaţiu.

Un solid aflat în mişcare plan-paralelă poate avea însă şi două sau chiar un singur grad de libertate; într-adevăr, dacă mişcarea de alunecare a planului, invariabil legat solidului, peste planul fix din spaţiu este îngrădită prin anumite legături, caracterul mişcării păstrîndu-se, numărul mărimilor geometrice care-i determină poziţia scade la două sau chiar la una singură. Un asemenea exemplu îl constituie mişcarea scării căreia, din cauza obligaţiei ca în timpul mişcării să rămînă în contact cu peretele vertical şi cu podeaua, i se poate determina poziţia numai printr-o singură mărime geometrică: unghiul său cu unul dintre pereţi.

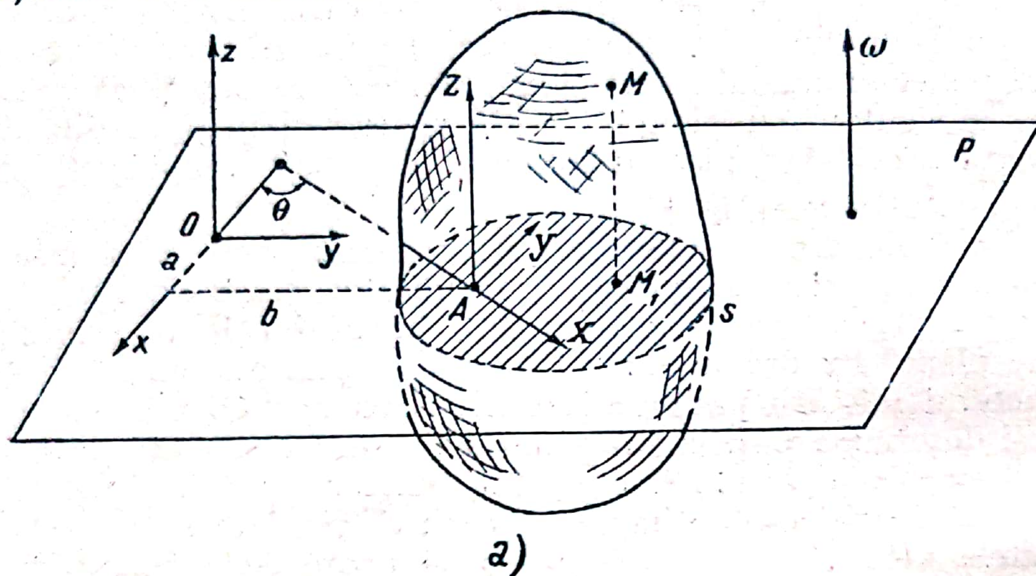
Să raportăm poziţia solidului la un sistem fix de axe avînd drept axă Oz axa perpendiculară pe planul fix P din spaţiu, peste care alunecă planul invariabil legat solidului, iar drept plan xOy acest plan fix (fig. 6.25, *a*). Sistemul legat de solid ($AXYZ$) îl vom alege astfel încît axele AX şi AY să se afle în planul solidului care lunecă peste planul fix, iar axa AZ perpendiculară pe acest plan. Mărimile geometrice care determină poziţia sistemului $AXYZ$ faţă de sistemul fix $Oxyz$ sînt distanţele a şi b (coordonatele originii A a sistemului mobil) şi unghiul θ. Dacă notăm cu X, Y şi Z coordonatele constante ale punctului M faţă de sistemul $AXYZ$ vom avea (fig. 6.25, *b*):

$$\begin{aligned} x &= a + X\cos\theta - Y\sin\theta, \\ y &= b + X\sin\theta + Y\cos\theta, \\ z &= Z. \end{aligned} \tag{6.58}$$

Acestea sînt expresiile coordonatelor unui punct oarecare al solidului ca funcţii de gradele de libertate ale acestuia; în aceste expresii mărimile X, Y şi Z sînt constante, iar a, b şi θ sînt funcţii de timp.

Analiza traiectoriilor. Pe cale geometrică rezultă că traiectoriile punctelor unui solid aflat în mişcare plan-paralelă sînt curbe plane care pot avea o formă oricît de complicată; planele tuturor

traiectoriilor sînt parelele cu planul fix P pe care se deplasează secțiunea S a solidului.



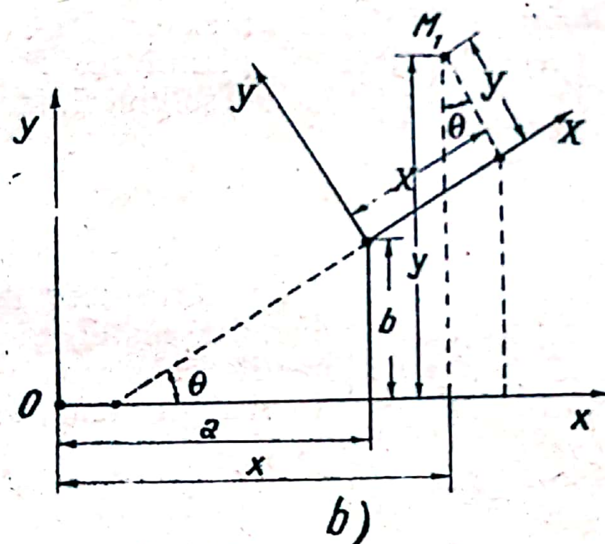


Fig. 6.25.

Analiza vitezelor. Proiecțiile vitezei unui punct oarecare al solidului pe axele sistemului fix $Oxyz$ se află prin derivarea expresiilor (6.58) ale coordonatelor unui punct oarecare aparținînd solidului; obținem:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{a} - X\sin\theta\omega - Y\cos\theta\omega = \dot{a} - (y-b)\,\omega, \\ v_y &= \dot{b} + X\cos\theta\omega - Y\sin\theta\omega = \dot{b} + (x-a)\,\omega, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \tag{6.59}$$

Dacă notăm

$$\dot{a}=v_{Ax},\quad \dot{b}=v_{Ay},$$

deoarece $\dot{a}$ şi $\dot{b}$ reprezintă proiecţiile vitezei punctului A pe axele de coordonate, formulele (6.59) se mai scriu:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{Ax} - \omega(y-b), \\ v_y &= v_{Ay} + \omega(x-a), \\ v_z &= 0. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Să determinăm acum dacă pe solid există puncte a căror viteză este nulă; pentru aceasta, vom anula componentele vitezei pe axele sistemului $Oxyz$; avem:

$$\begin{aligned} v_{Ax} - (y-b)\omega &= 0, \\ v_{Ay} + (x-a)\omega &= 0. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Din acest sistem vom deduce coordonatele punctului I situat în planul secţiunii S şi care are în acest moment viteza nulă; ele sînt:

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{v_{Ay}}{\omega}, \\ y &= b + \frac{v_{Ax}}{\omega}. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Dacă ţinem seama că:

$$v_{Ay} = \frac{da}{d\theta} \quad \text{şi} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt},$$

avem:

$$\frac{v_{Ay}}{\omega} = \frac{\frac{db}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{db}{dt}.$$

Procedînd la fel şi pentru cea de-a doua formulă (6.61), adică înlocuind

$$v_{Ax}=\frac{da}{dt} \text{ şi } \omega=\frac{d\theta}{dt} .$$

Obţinem :

$$x=a-\frac{db}{d\theta}$$
$$y=b+\frac{da}{d\theta} . \qquad (6.63)$$

De aici rezultă faptul că în timpul mişcării plan-paralele a unui solid rigid există o infinitate de puncte dispuse în lungul unei drepte perpendiculare pe planul mişcării, care înţeapă acest plan în punctul I (x, y) care au viteza nulă ; această dreaptă poartă denumirea de *axă instantanee* a mişcării solidului considerat şi joacă un rol foarte important în studiul mişcării acestuia ; punctul I se numeşte *centrul instantaneu de rotaţie*.

Poziţia centrului instantaneu se schimbă mereu în timpul mişcării atît faţă de sistemul fix cît şi faţă de sistemul mobil, descriind în raport cu aceste sisteme două curbe : o curbă denumită *bază*, care reprezintă locul geometric al centrului instantaneu în raport cu sistemul fix, şi o altă curbă denumită *rostogolitoare*, care reprezintă locul centrului instantaneu în raport cu sistemul mobil.

O experienţă simplă ne arată că o foaie de hîrtie poate fi adusă pe o masă plană dintr-o poziţie în alta numai prin rotaţii de unghiuri mici în jurul a diferite axe perpendiculare pe planul său. Înţepînd cu un ac locul acestor axe vom căpăta urmele centrului instantaneu de rotaţie pe foaia respectivă şi pe masa pe care ea s-a mişcat ; dacă unim între ele aceste urme vom obţine două curbe : una situată pe masă (baza) şi alta situată pe hîrtie (rostogolitoare).

Se poate arăta că cele două traiectorii ale centrului instantaneu de rotaţie (baza şi rostogolitoarea) sînt tangente între ele în timpul mişcării în centrul instantaneu, rostogolindu-se una pe cealaltă fără alunecare.

Dacă axa perpendiculară pe planul mişcării este fixă pentru un moment, înseamnă că toate punctele solidului vor avea vitezele ca şi cum întregul solid s-ar roti, în acel moment, în jurul acestei axe, la fel ca în cazul foii de hîrtie adusă dintr-o poziţie într-alta, prin rotaţii, în jurul unei axe care se schimbă de la un moment la altul.

Viteza unui punct A din planul mişcării se va afla cu formula de la mişcarea de rotaţie, centrul de rotaţie fiind I :

$$v_A = \omega AI. \tag{6.64}$$

Am mai întîlnit o asemenea distribuţie de viteze în cazul mişcării de rotaţie a solidului rigid. Putem spune deci că *distribuţia de viteze într-o mişcare plană este identică cu aceea de la mişcarea de rotaţie, ca şi cînd rigidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotaţie.* Trebuie observat că rigidul nu se roteşte efectiv în jurul acestei axe deoarece ea se află în mişcare atît faţă de sistemul fix cît şi faţă de corp, ci distribuţia de viteze este aceea *ca şi cînd* solidul s-ar roti în jurul acestei axe (fig. 6.26).

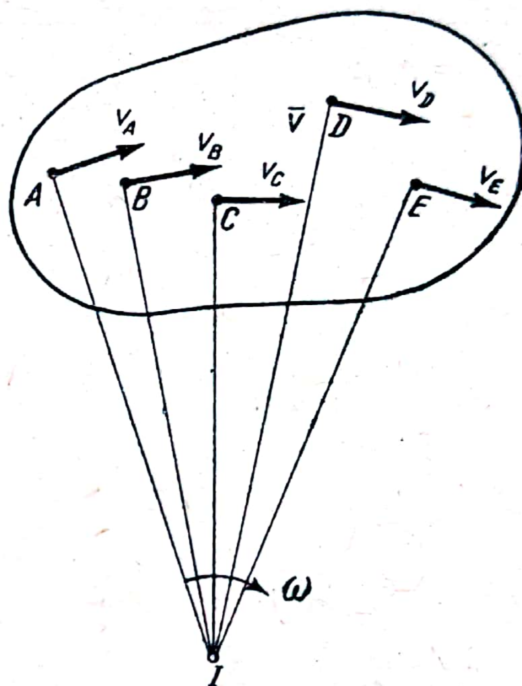


Fig. 6.26.

Determinarea poziţiei centrului instantaneu de rotaţie. Folosind proprietăţile mişcării plan-paralele, putem determina poziţia centrului instantaneu de rotaţie în modul următor :

— dacă se cunosc direcţiile vitezelor a două puncte se duc perpendiculare pe aceste direcţii în punctele respective ; la intersecţia lor se află centrul instantaneu (fig. 6.27, *a*) ;

— dacă se cunoaşte viteza unui punct şi viteza unghiulară a mişcării, se ia pe perpendiculara la această viteză o distanţă egală cu raportul dintre viteza punctului şi viteza unghiulară ; punctul astfel obţinut este centrul instantaneu de rotaţie. În figura 6.27, *b* sînt arătate celor două poziţii ale centrului instantaneu corespunzătoare sensurilor lui $\bar{\omega}$.

În cazul în care suporturile vitezelor celor două puncte sînt paralele între ele, centrul instantaneu se află la infinit ; în acest caz corpul se află în mişcare de translaţie plană (caz particular al mişcării plan-paralele).

Analiza acceleraţiilor. Componentele acceleraţiei unui punct oarecare $M(X,Y)$ al solidului pe axele sistemului fix $Oxyz$ se

mai pot afla prin derivarea componentelor vitezei (6.59) pe același sistem de axe; obținem:

$$a_x=\ddot{a}-(X\cos\theta-Y\sin\theta)\omega^2-(X\sin\theta+Y\cos\theta)\varepsilon,$$
$$a_y=\ddot{b}-(X\sin\theta+Y\cos\theta)\omega^2+(X\cos\theta-Y\sin\theta)\varepsilon, \qquad (6.65)$$
$$a_z=0.$$

Aceste proiecții mai pot fi scrise și sub forma următoare, dacă se ține seama de formulele (6.58) și de faptul că $\ddot{a}=a_{Ax}$ și $\ddot{b}=a_{Ay}$:

$$a_x=a_{Ax}-\omega^2(x-a)-\varepsilon(y-b),$$
$$a_y=a_{Ay}-\omega^2(y-b)+\varepsilon(x-a), \qquad (6.66)$$
$$a_z=0.$$

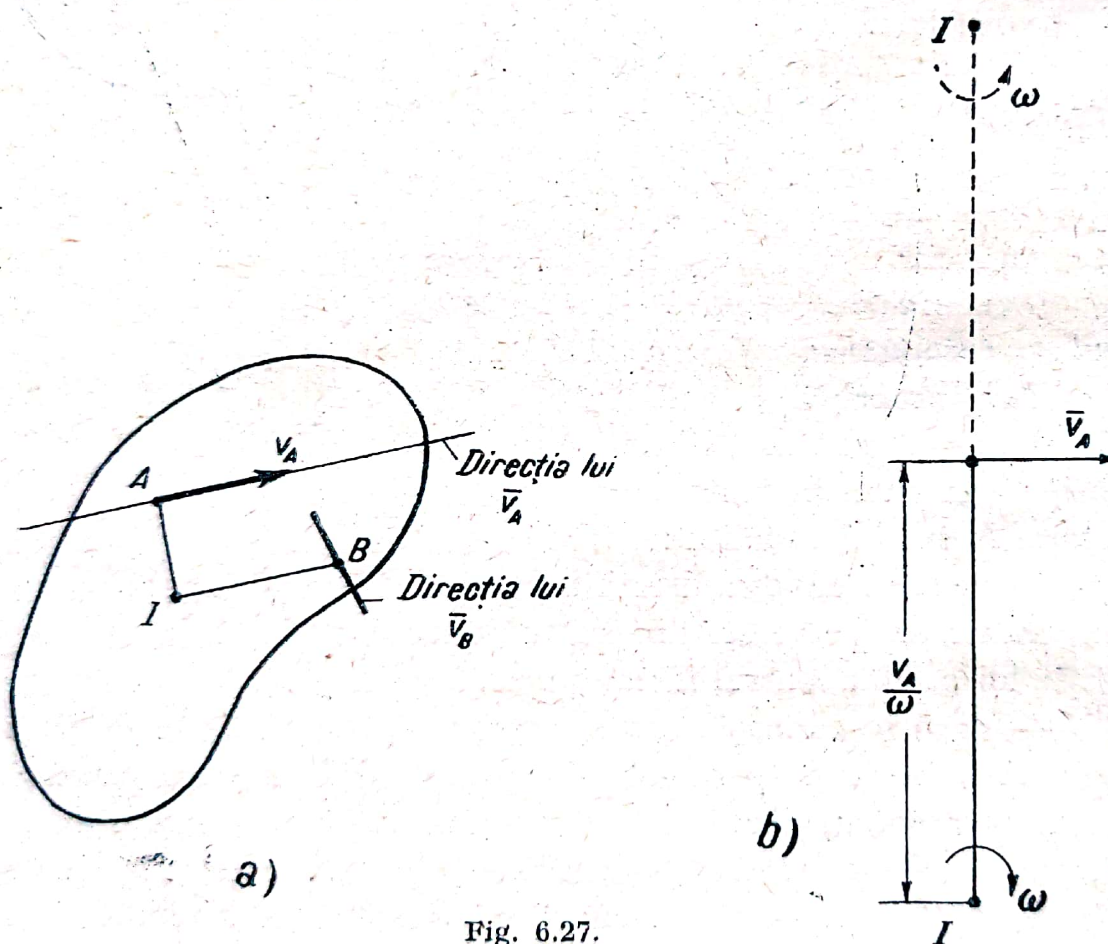


Fig. 6.27.

La fel ca și în cazul vitezei putem determina și aici punctele de accelerație nulă ale solidului; coordonatele acestor puncte se determină anulînd pe a_x și a_y din expresiile (6.66). Punctul astfel obținut poartă denumirea de *centrul accelerațiilor* și el joacă pentru studiul accelerațiilor același rol pe care-l joacă centrul instantaneu pentru studiul vitezelor.

3. Aplicații

a) Una dintre mașinile-unelte realizată de industria noastră constructoare de mașini creată în anii regimului democrat-popular este și șepingul „Înfrățirea" (Oradea). Cursa portcuțitului acestei mașini este de 250 mm, iar portcuțitul efectuează 17,9 curse pe minut, în timp ce masa avansează cu 0,67 mm pe o cursă dublă; se cere viteza medie a portcuțitului și viteza de avans a mesei[1].

R e z o l v a r e

Portcuțitul execută o mișcare de translație rectilinie alternativă, iar masa care poartă piesa execută o mișcare de translație rectilinie uniformă.

Viteza medie a portcuțitului este:

$$v_m = 17{,}9 \frac{\text{curse duble}}{\text{min}} \times 2 \times 250 \frac{\text{mm}}{\text{cursa dublă}} = 8\,950 \frac{\text{mm}}{\text{min}} = 8{,}95 \frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

Viteza de avansare a mesei este:

$$v = 0{,}67 \frac{\text{mm}}{\text{cursa dublă}} \times 17{,}9 \frac{\text{curse duble}}{\text{min}} = 11{,}993 \frac{\text{mm}}{\text{min}} \approx 12 \frac{\text{mm}}{\text{min}}.$$

b) Rotorul unei turbine cu abur avînd diametrul $D = 1$ m se rotește cu turația constantă $n = 3\ 000$ rot/min. Se cere să se determine viteza și accelerația unui punct de la periferia sa.

R e z o l v a r e

Aplicînd formulele de la mișcarea de rotație obținem:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \times 3\ 000}{30} = 314 \text{ rad/s},$$

$$v = R\omega = 0{,}5 \times 3\ 14 = 157 \text{ m/s},$$

$$a_n = R\omega^2 = 0{,}5 \times 314^2 = 49\ 298 \text{ m/s}^2.$$

c) În figura 6.28 este reprezentată o presă cu fricțiune întrebuințată la ștanțarea a diferite piese în industria grea în industria ușoară, a aparatelor de radio ș.a. Ea este formată din două discuri A_1, A_2, solidare pe arborele xy ce poate luneca

---

[1] Se știe că cursa și numărul de curse duble ale portcuțitului, precum și viteza de avans a mesei sînt reglabile; datele din problemă reprezintă una din variante.

în lungul acestei axe în timp ce discurile se rotesc, şi un volant V, solidar cu un şurub trecînd printr-o piuliţă fixă pe batiul maşinii care pune în mişcare poansonul P, ştanţînd piese pe nicovala N solidară cu batiul maşinii. Distanţa dintre cele două discuri este puţin mai mare decît diametrul volantului V. Se cere să se descrie modul de funcţionare al acestei prese, arătînd totodată şi mişcările pe care le execută fiecare dintre elementele ei componente, presupunînd că arborele xy se roteşte cu viteză unghiulară constantă.

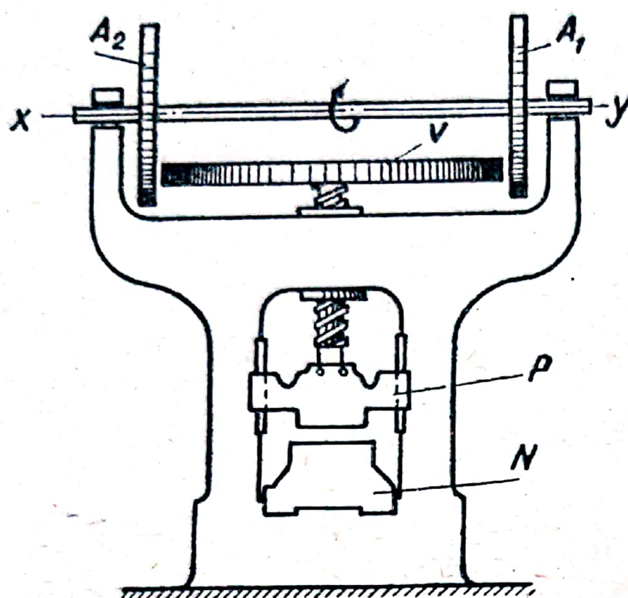


Fig. 6.28.

Rezolvare

Cînd arborele xy se roteşte, discurile A_1, A_2 execută o mişcare de rotaţie în jurul axei fixe xy. În timpul în care axa xy este manevrată astfel încît unul dintre discuri să atingă marginea volantului V, discurile A_1, A_2 execută o mişcare elicoidală. Dacă discul A_1 atinge periferia volantului V, acesta este pus în mişcare prin fricţiune; el începe să se rotească în timp ce coboară, executînd o mişcare de şurub neuniformă deoarece pe măsură ce se depărtează de axa xy viteza sa periferică creşte. Poansonul P coboară vertical ghidat pe batiul maşinii, executînd o mişcare de translaţie rectilinie variată, deoarece el coboară din ce în ce mai repede pînă la contactul cu nicovala N. Pentru a ridica poansonul P, se pune în contact cu periferia volantului V celălalt disc, A_2.

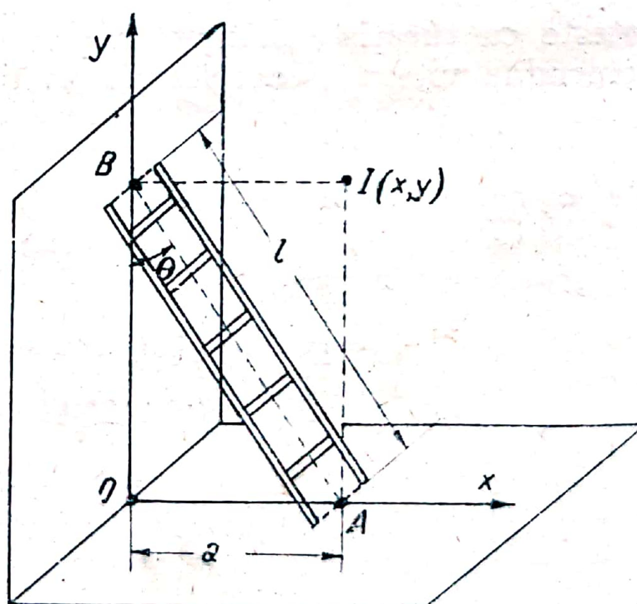


Fig. 6.29.

d) O scară AB alunecă cu cele două extremităţi ale sale A şi B pe doi pereţi, dintre care unul este orizontal, iar celălalt vertical.

Se cere să se determine centrul instantaneu din mişcarea plan-paralelă a scării, pentru poziţia din figura 6.29, cînd planul scării face cu planul vertical unghiul θ.

Rezolvare

Pentru determinarea coordonatelor centrului instantaneu de rotaţie I vom folosi formulele (6.63). Vom alege punctul A la contactul secţiunii mediane a scării cu planul orizontal; coordonatele sale sînt:

$$a=l \sin\theta, \quad b=0.$$

Derivînd aceste coordonate în raport cu unghiul θ, avem:

$$\frac{da}{d\theta}=l\cos\theta, \quad \frac{db}{d\theta}=0.$$

Înlocuind acum în formulele (6.63) obţinem:

$$x=l\sin\theta-0=l\sin\theta,$$

$$y=0+l\cos\theta=l\cos\theta.$$

Se observă uşor că $x=OA$ şi $y=OB$; punctul I este unul din vîrfurile dreptunghiului $OBIA$ (fig. 6.29). El poate fi determinat ca intersecţia perpendicularelor pe vitezele a două puncte. Punctele A şi B ale scării au vitezele îndreptate în lungul axelor Ox şi Oy; perpendicularele pe aceste axe sînt dreptele IA şi IB, care se intersectează în punctul I.

Capitolul VII

CINEMATICA SISTEMELOR MATERIALE IN RAPORT CU UN SISTEM MOBIL

1. Mişcarea relativă a punctului material (compunerea mişcărilor simultane ale punctului)

a) **Mişcarea aceluiaşi corp observată dintr-un sistem de referinţă fix şi dintr-un sistem de referinţă mobil.** Diferitele mişcări ale corpurilor studiate pînă aci au fost raportate la un

sistem de referință care poate fi considerat fix. În natură și în tehnică se întîlnesc însă de foarte multe ori situații în care sîntem obligați să raportăm mișcarea diferitelor corpuri la sisteme de referință mobile. Prima întrebare pe care ne-o punem în aceste cazuri este aceea dacă traiectoriile, vitezele și accelerațiile punctelor corpului respectiv observate din sistemul mobil sînt identice cu cele observate din sistemul fix. Cîteva exemple ne vor da răspuns negativ la această întrebare.

Să considerăm mișcarea de cădere liberă a unei pietre pe verticala descendentă. Un observator așezat pe Pămînt, considerat ca sistem de referință fix, va descrie această mișcare ca fiind o mișcare rectilinie uniform accelerată. Să ne imaginăm că, în timp ce piatra se mișcă, o împrejmuim cu o cabină aflată de asemenea în cădere liberă și în care se găsește un observator; acesta, aflat în sistemul de referință mobil constituit de cabină, va spune că piatra se află în repaus, deoarece el căzînd o dată cu cabina și piatra (fără a-și da seama de această mișcare) vede piatra nemișcată.

Să considerăm mișcarea vîrfului unui cuțit de strung față de batiul mașinii, considerat ca sistem fix, și față de piesa strunjită, considerată ca sistem mobil; față de batiul mașinii, vîrful cuțitului descrie o mișcare rectilinie uniformă, în timp ce față de piesa aflată în mișcare, același vîrf al cuțitului descrie o mișcare pe elice.

Deoarece caracteristicile mișcării aceluiași corp considerate față de un sistem fix și față de un sistem mobil diferă între ele, ne propunem să determinăm în cele ce urmează care sînt relațiile care leagă între ele aceste caracteristici.

b) **Elemente și noțiuni importante privind mișcarea relativă a punctului material.** La studiul mișcării relative a punctului material intervin ca elemente: un punct mobil, un sistem de referință mobil și un sistem de referință fix. Problema care se pune în general este aceea de a determina mișcarea punctului material față de sistemul fix, cunoscînd mișcarea punctului față de sistemul mobil și a sistemului mobil față de sistemul fix.

Operația prin care se determină viteza și accelerația punctului mobil față de sistemul de referință fix se mai numește și *compunerea mișcărilor punctului considerat* (fig. 7.1).

În mișcarea relativă a punctului material intervin trei noțiuni importante:

— *mișcarea absolută* este mișcarea punctului considerat în raport cu sistemul de referință fix; se numește *viteză absolută*

şi *accelerație absolută* viteza respectiv accelerația punctului în această mişcare. Dacă sistemul de referință fix este un triedru cartezian, proiecțiile vitezei absolute, respectiv ale accelerației absolute pe axele acestui triedru se obțin derivînd o dată, respectiv de două ori, în raport cu timpul coordonatele punctului față de acest triedru;

— *mişcarea relativă* este mişcarea punctului considerat în raport cu sistemul de referință mobil; se numeşte *viteză relativă* şi *accelerație relativă* viteza, respectiv accelerația punctului în această mişcare. Dacă sistemul de referință mobil este un triedru cartezian, proiecțiile vitezei relative, respectiv ale accelerației relative pe axele acestui triedru se obțin derivînd o dată, respectiv de două ori, în raport cu timpul coordonatele punctului față de acest triedru;

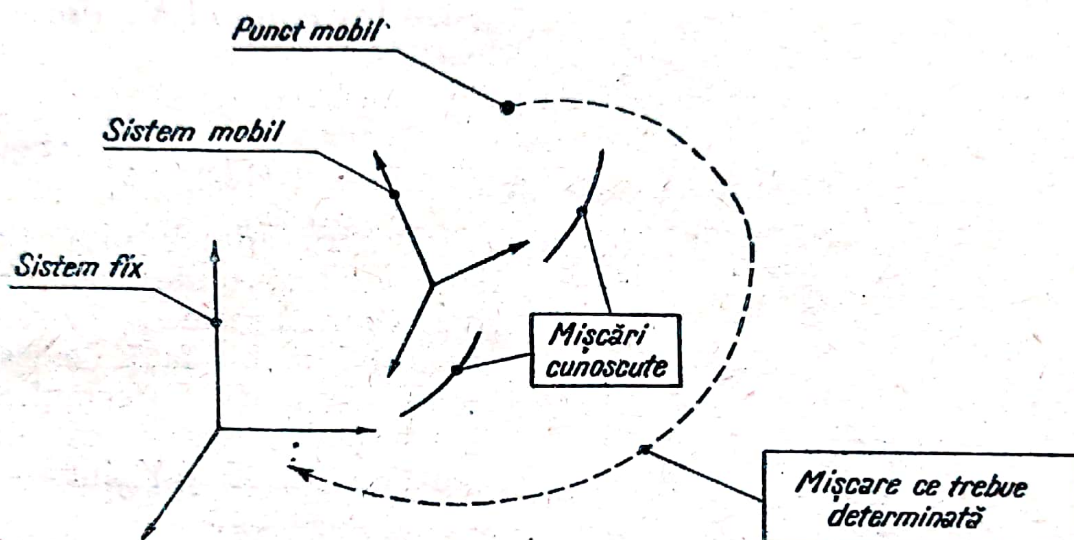


Fig. 7.1.

— *mişcarea de transport* este mişcarea în raport cu triedrul fix a acelui punct aparținînd triedrului mobil care, în momentul considerat, coincide cu punctul mobil a cărui mişcare se studiază, adică mişcarea pe care ar avea-o punctul dacă mişcarea relativă ar înceta; se numeşte *viteză de transport* şi *accelerație de transport* viteza, respectiv accelerația acelui punct aparținînd triedrului mobil care în momentul considerat coincide cu punctul mobil a cărui mişcare se studiază; ele se determină cu ajutorul formulelor cunoscute de la cinematica rigidului, după mişcarea pe care o are sistemul mobil considerat.

c) Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a punctului material. Să presupunem că mişcarea sistemului de referință mobil față de sistemul fix este o mişcare plan-paralelă (fig. 7.2).

Punctul mobil M nu mai este fix în planul mişcării, ci are şi el o mişcare proprie în planul XAY (mişcarea relativă) cu viteza $\overline{v}_r$, ale cărei componente sînt derivatele coordonatelor sale din acest plan :

$$v_{rx} = \dot{X}, \quad v_{ry} = \dot{Y}. \tag{7.1}$$

Viteza de transport $\overline{v}_t$ a punctului M este viteza pe care o obţinem dacă punctul M este considerat fix pe planul XAY ; această viteză am determinat-o la capitolul VI (formulele 6.60) :

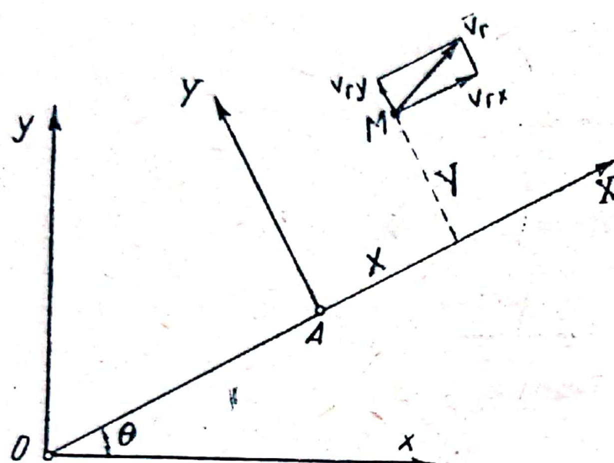


Fig. 7.2.

$$\begin{aligned} v_{tx} &= v_{Ax} - \omega\,(y - b), \\ v_{ty} &= v_{Ay} + \omega\,(x - a). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Pentru aflarea proiecţiilor vitezei absolute vom deriva coordonatele x, y ale punctului mobil faţă de sistemul fix xOy (formulele (6.58)) ţinînd seama că de această dată X şi Y sînt variabile ; obţinem :

$$\begin{aligned} v_{ax} &= \dot{a} + \dot{X}\cos\theta - X\sin\theta\,\omega - \dot{Y}\sin\theta - Y\cos\theta\,\omega, \\ v_{ay} &= \dot{b} + \dot{X}\sin\theta + X\cos\theta\,\omega + \dot{Y}\cos\theta - Y\sin\theta\,\omega \end{aligned} \tag{7,3}$$

sau ţinînd seama de relaţiile :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= v_{Ax}, \quad \dot{b} = v_{Ay}, \\ \dot{X} &= v_{rx}, \quad \dot{Y} = v_{ry}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

avem :

$$\begin{aligned} v_{ax} &= v_{Ax} + v_{rX}\cos\theta - \omega\,(X\sin\theta + Y\cos\theta) - v_{rY}\sin\theta, \\ v_{ay} &= v_{Ay} + v_{rX}\sin\theta + v_{rY}\cos\theta + \omega\,(X\cos\theta - Y\sin\theta). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Dar în baza formulelor (6.58) putem scrie :

$$\begin{aligned} v_{ax} &= v_{Ax} + v_{rX}\cos\theta - v_{rY}\sin\theta - \omega\,(y - b), \\ v_{ay} &= v_{Ay} + v_{rX}\sin\theta + v_{rY}\cos\theta + \omega\,(x - a). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Pe de altă parte, din figura 7.2 se vede că expresia $v_{rX}\cos\theta - v_{rY}\sin\theta$ reprezintă suma proiecţiilor componentelor vitezei v_r pe axele Ox şi Oy ; deci :

$$\begin{aligned} v_{rX}\cos\theta - v_{rY}\sin\theta &= v_{rx}, \\ v_{rX}\sin\theta + v_{rY}\cos\theta &= v_{ry}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Cu aceasta, formulele (7.6) se scriu:

$$v_{ax} = v_{rx} + v_{tx},$$
$$v_{ay} = v_{ry} + v_{ty}, \tag{7.8}$$

sau, sub formă vectorială:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t. \tag{7.9}$$

Aceasta este formula de compunere a vitezelor în mişcarea relativă; ea arată că *viteza absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre viteza relativă şi viteza de transport a punctului.*

d) **Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a punctului material.** Procedeul pentru aflarea acceleraţiei absolute este acelaşi ca şi în cazul aflării vitezei absolute. Formula care se obţine este:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_t + \overline{a}_c. \tag{7.10}$$

Termenul $\overline{a}_c$ poartă numele de acceleraţia lui Coriolis, după numele savantului francez Gustave Coriolis care a descoperit-o.

Formula (7.10) arată că *acceleraţia absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre acceleraţia relativă, acceleraţia de transport şi acceleraţia lui Coriolis.*

Acceleraţia lui Coriolis este nulă dacă sistemul de referinţă mobil se află în mişcare de translaţie ($\overline{\omega} = 0$) sau dacă punctul mobil se mişcă astfel încît viteza sa relativă este paralelă cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$, (exemplu: mişcarea unui punct mobil pe generatoarea unui cilindru circular drept care se roteşte în jurul axei sale).

Pentru cazul mişcărilor în care viteza relativă $\overline{v}_r$ este perpendiculară pe viteza unghiulară de rotaţie a sistemului mobil $\overline{\omega}$, direcţia şi sensul acceleraţiei lui Coriolis coincid cu acelea ale vectorului $\overline{v}_r$ rotit de 90° în planul perpendicular pe vectorul $\overline{\omega}$ şi în sensul rotaţiei sistemului mobil; modulul său este în acest caz $2\,\omega v_r$.

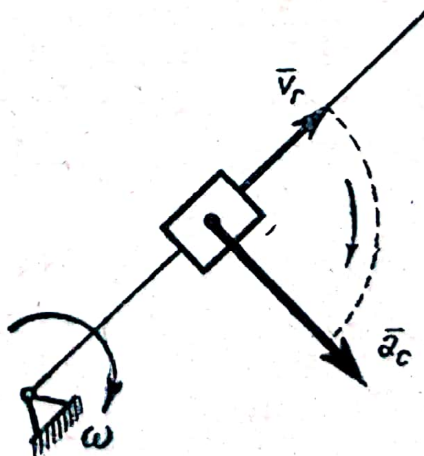


Fig. 7.3.

În figura 7.3 este arătată determinarea accelerației lui Coriolis prin această metodă pentru un cursor care se mişcă cu vi-

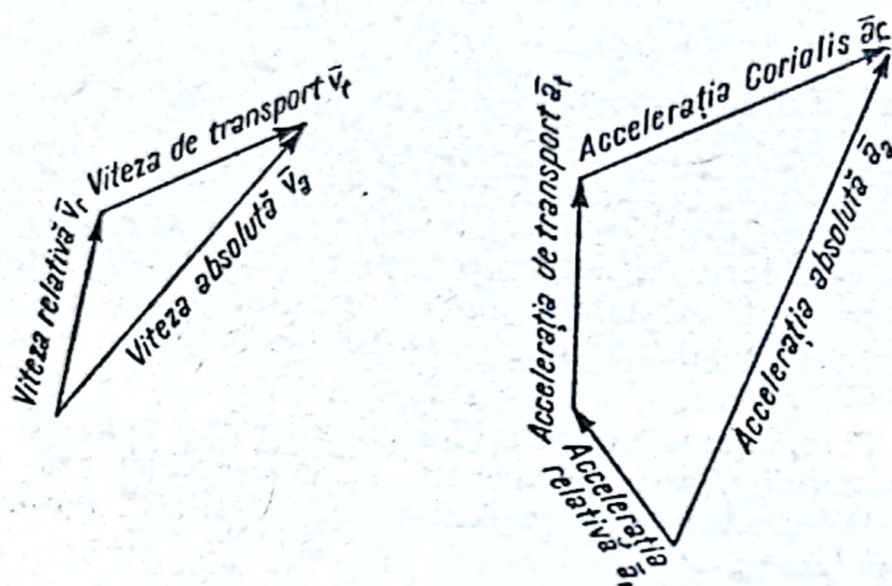


Fig. 7.4.

teza relativă $\overline{v_r}$ față de o bară care se rotește cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$, iar în figura 7.4 este arătată grafic compunerea vitezelor şi accelerațiilor punctului.

2. Mişcarea relativă a solidului rigid (compunerea mişcărilor simultane ale unui solid rigid)

În practică se întîlneşte de multe ori cazul unui solid rigid supus simultan la mai multe mişcări; ca exemplu poate servi cuțitul unui strung, care poate fi supus simultan la două mişcări de translație rectilinii, şi anume: o mişcare relativă (1) a dispozitivului portcuțit avînd direcția perpendiculară pe aceea a deplasării saniei, şi o mişcare de transport (2) a saniei (fig. 7.5), sau mişcarea oalei cu metal dintr-o turnătorie care este supusă simultan la trei mişcări de translație perpendiculare una pe alta (translația podului, a pisicii şi a cîrligului).

În asemenea cazuri se pune problema de a se studia modul în care sînt repartizate la un moment dat vitezele şi accelerațiile în diferitele puncte ale solidului. Deoarece problema repartiției accelerațiilor este ceva mai complicată, ne vom limita în cele ce urmează numai la studiul modului de repartiție al vitezelor. Mai precis, problema compunerii mişcărilor simultane ale unui solid rigid poate fi formulată astfel:

Se dau un corp solid, mai multe sisteme de referință mobile și un sistem de referință fix; cunoscînd mișcarea solidului rigid față de un sistem mobil de referință, a acestui sistem mobil față de altul ș.a.m.d., se cere să se determine modul în care sînt repartizate la un moment dat vitezele diferitelor puncte ale solidului luate în raport cu sistemul de referință fix.

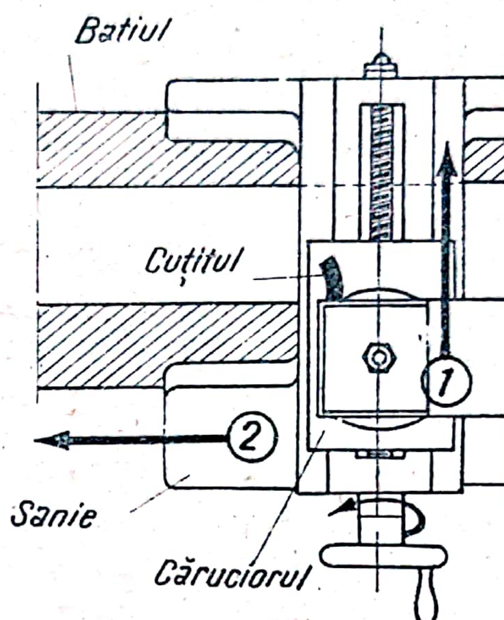


Fig. 7.5.

Operația prin care se determină legea de distribuție a vitezelor corpului solid considerat față de sistemul de referință fix se numește *compunerea mișcărilor acelui solid*; mișcarea corpului solid considerat față de sistemul fix se numește *mișcare rezultantă*, iar mișcările relative intermediare se numesc *mișcări componente*.

Vom considera rezolvată această problemă atunci cînd vom determina viteza unui punct oarecare al solidului ca funcție de mișcările intermediare, așa cum este arătat schematic în figura 7.6.

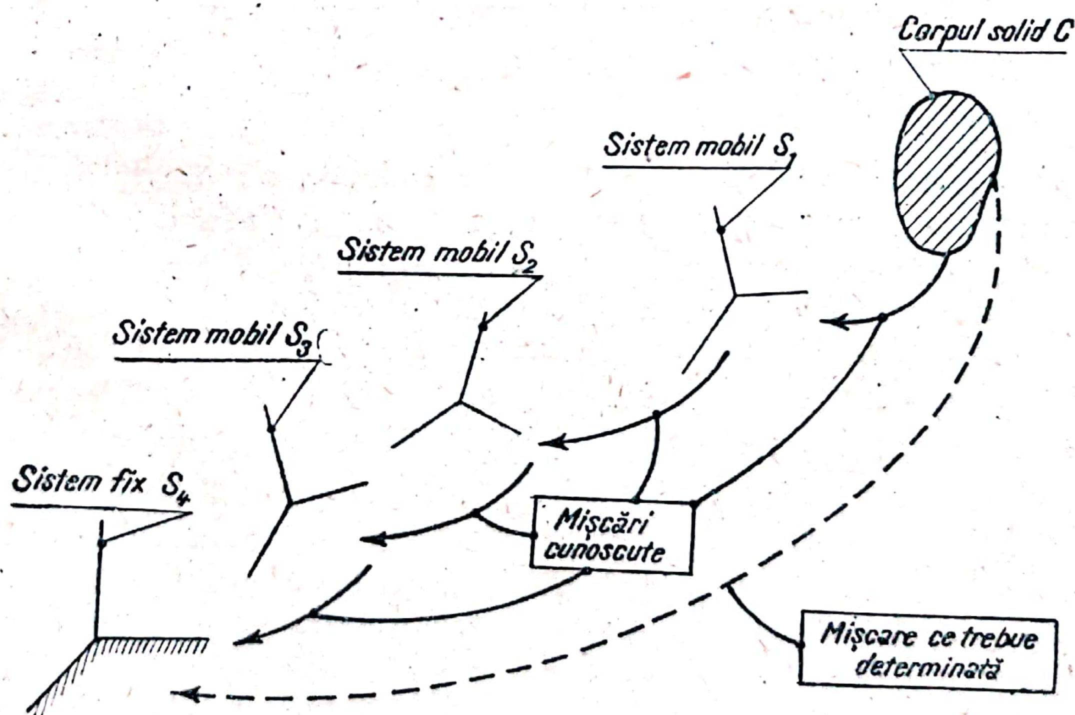


Fig. 7.6.

a) **Compuneri de translaţii simultane.** Vom considera mai întîi cazul particular cel mai simplu al acestei probleme, şi anume acela în care mişcarea relativă a corpului solid considerat (C) faţă de sistemul mobil S_1, a sistemului mobil S_1 faţă de sistemul mobil S_2 ş.a.m.d., a ultimului sistem mobil faţă de sistemul fix sînt translaţii. Un exemplu de asemenea caz îl constituie mişcarea prismelor din figura 7.7.

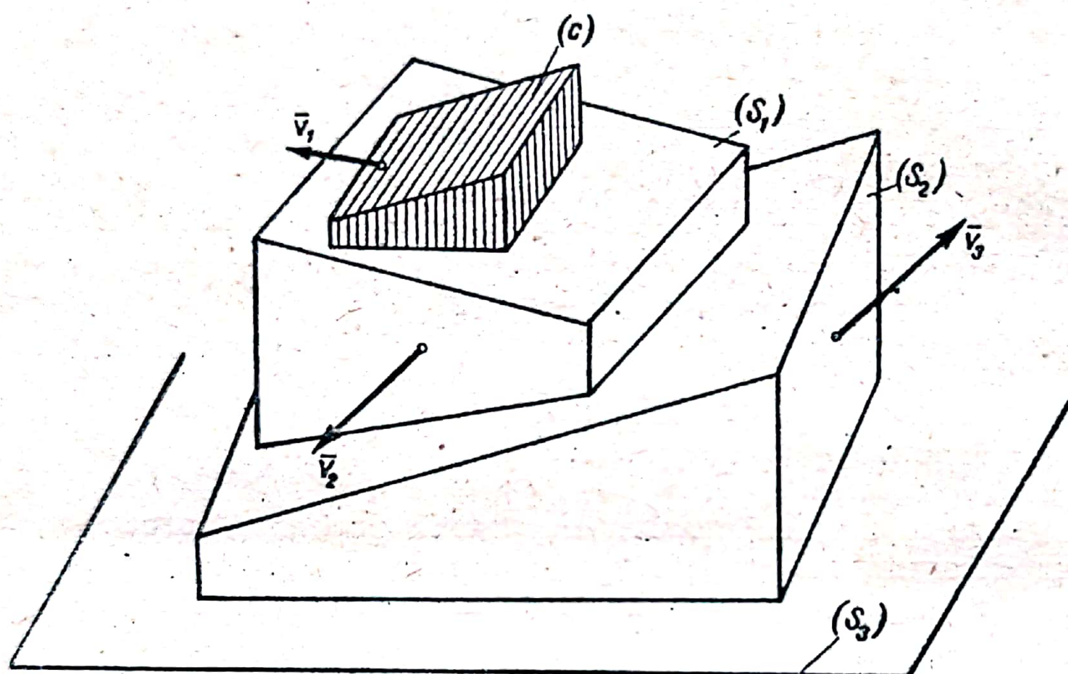


Fig. 7.7.

Vitezele de translaţie le vom nota astfel : viteza de translaţie a corpului (C) faţă de sistemul mobil (S_1) o vom nota prin $\bar{v}_1$; viteza de translaţie a sistemului mobil S_1 faţă de sistemul mobil S_2 o vom nota prin $\bar{v}_2$ ş.a.m.d. După cele ce cunoaştem de la studiul mişcării de translaţie a solidului rigid, toate punctele unui corp aflat în mişcare de translaţie au aceeaşi viteză.

Să alegem acum un punct oarecare M al solidului a cărui mişcare o studiem; acesta are, ca de altfel toate punctele solidului, viteza $\bar{v}_1$ faţă de sistemul mobil S_1. Punctul corespunzător lui M din sistemul mobil S_1 va avea faţă de sistemul mobil S_2 viteza $\bar{v}_2$. În adevăr, după cele cunoscute de la mişcarea relativă a punctului, pentru a determina această viteză (viteza de transport) considerăm că mişcarea relativă a corpului C faţă de sistemul mobil S_1 încetează şi determinăm astfel viteza punctului M faţă de sistemul de referinţă S_2. Considerăm acum mişca-

rea punctului M față de sistemul mobil S_1 ca mișcare relativă, iar mișcarea sistemului mobil (1) față de sistemul mobil (2) ca mișcare de transport, viteza „absolută" a punctului M față de sistemul mobil (2) va fi, după formula (7.10):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \, .$$

Această viteză am denumit-o „absolută", deoarece sistemul de referință (2) nu este fix, ci se află la rîndul său în mișcare față de sistemul (3). Aceasta înseamnă că viteza astfel obținută este de fapt tot o viteză relativă. Pentru a obține o nouă viteză „absolută" $\bar{v}'_a$ de această dată față de sistemul de referință (3), va trebui ca la viteza $\bar{v}_a$ să adăugăm viteza de transport $\bar{v}_3$; rezultă:

$$\bar{v}'_a = \bar{v}_a + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 \, .$$

Acest raționament poate fi din nou repetat, întrucît sistemul de referință (3) este de asemenea mobil. Procedînd în acest mod pînă ce sistemul de referință față de care se calculează viteza punctului M este sistemul fix, vom obține viteza punctului M față de acest sistem; ea are expresia:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots + \bar{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i \, . \qquad (7.11)$$

În cazul reprezentat în figura 7.7, $n = 3$.

Rezultatul obținut poate fi enunțat astfel: *prin compunerea unui număr oarecare de mișcări avînd distribuții de viteze*

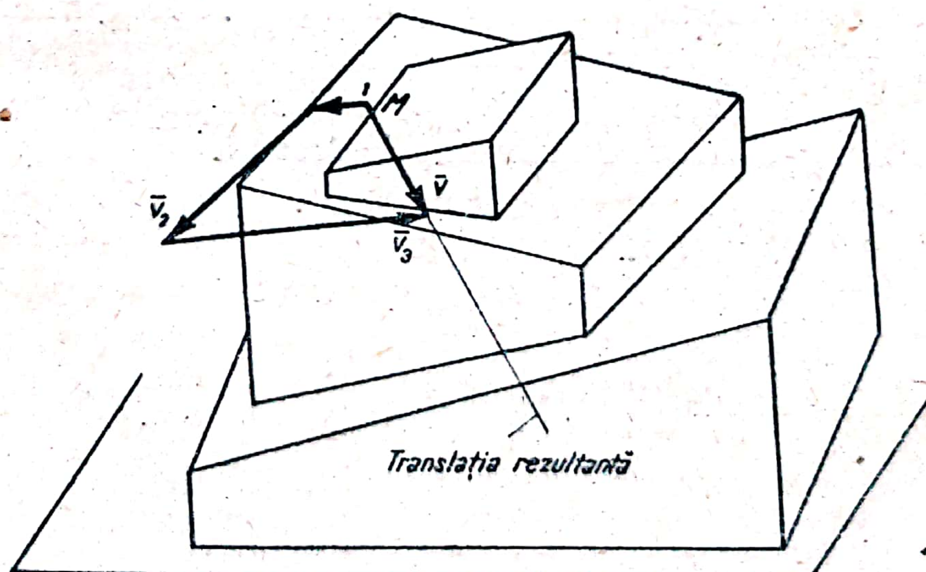


Fig. 7.8.

caracteristice mişcărilor de translaţie se obţine o mişcare rezultantă avînd o distribuţie de viteze de asemenea caracteristică unei mişcări de translaţie; viteza de translaţie a mişcării rezultante este egală cu suma vectorială a vitezelor mişcărilor componente (fig. 7.8).

Faptul că mişcările de translaţie componente sînt translaţii se interpretează în sensul că vitezele $\overline{v_i}$ ale acestor mişcări îşi pot schimba atît mărimea cît şi orientarea de la un moment la altul; legea de găsire a vitezei rezultante exprimată prin relaţia (7.11) îşi păstrează însă valabilitatea în orice moment.

În baza analogiei dintre viteza de translaţie şi vectorul moment al unui cuplu de forţe, rezultă că modul de obţinere a vitezei $\overline{v}$ este analog celui prin care se obţine vectorul moment rezultant al unui sistem de cupluri oarecare în spaţiu.

b) **Compuneri de rotaţii concurente simultane.** Un alt caz particular al compunerii mişcărilor îl constituie acela în care mişcarea relativă a corpului solid C considerat faţă de sistemul mobil S_1, a sistemului mobil S_1 faţă de sistemul mobil S_2 ş.a.m.d., a ultimului sistem mobil faţă de sistemul fix sînt rotaţii, ale căror axe sînt concurente într-un punct O, fix în spaţiu (fig. 7.9, *a*).

Vitezele unghiulare de rotaţie le vom nota, analog cazului compunerii translaţiilor, astfel: viteza unghiulară de rotaţie a corpului C faţă de sistemul mobil S_1 o vom nota prin ω_1; viteza unghiulară de rotaţie a sistemului mobil S_1 faţă de sistemul mobil S_2 o vom nota prin ω_2 ş.a.m.d. După cîte cunoaştem de la studiul mişcării circulare a punctului, viteza unui punct mobil M care descrie o mişcare circulară este momentul vectorului $\overline{\omega}$ în raport cu punctul M.

Să studiem mişcarea punctului M. Viteza sa faţă de sistemul mobil S_1 este dată de momentul vectorului $\overline{\omega_1}$ în raport cu punctul M.

Punctul corespunzător lui M din sistemul mobil S_1 va avea faţă de sistemul mobil S_2 viteza $\overline{v_t}$, dată de momentul vectorului $\overline{\omega_2}$ faţă de punctul M.

Această viteză o determinăm considerînd corpul C solidar cu sistemul mobil S_1 şi studiind mişcarea punctului M faţă de sistemul de referinţă S_2.

Considerînd acum mişcarea punctului M faţă de sistemul mobil S_1 ca mişcarea relativă şi mişcarea sistemului S_1 faţă de sistemul S_2 ca mişcare de transport, vom obţine viteza punctului M faţă de sistemul de referinţă S_2; după cele cunoscute

de la mişcarea relativă a punctului, aceasta se obţine prin adunarea vitezei relative $\bar{v}_r$ şi a vitezei de transport $\bar{v}_t$:

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_r + \bar{v}_t ,$$

sau, ceea ce e totuna, a momentelor date de vectorii $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ faţă de punctul M.

Repetînd raţionamentul de mai sus, din aproape în aproape, adică considerînd această viteză ca viteză relativă faţă de sis-

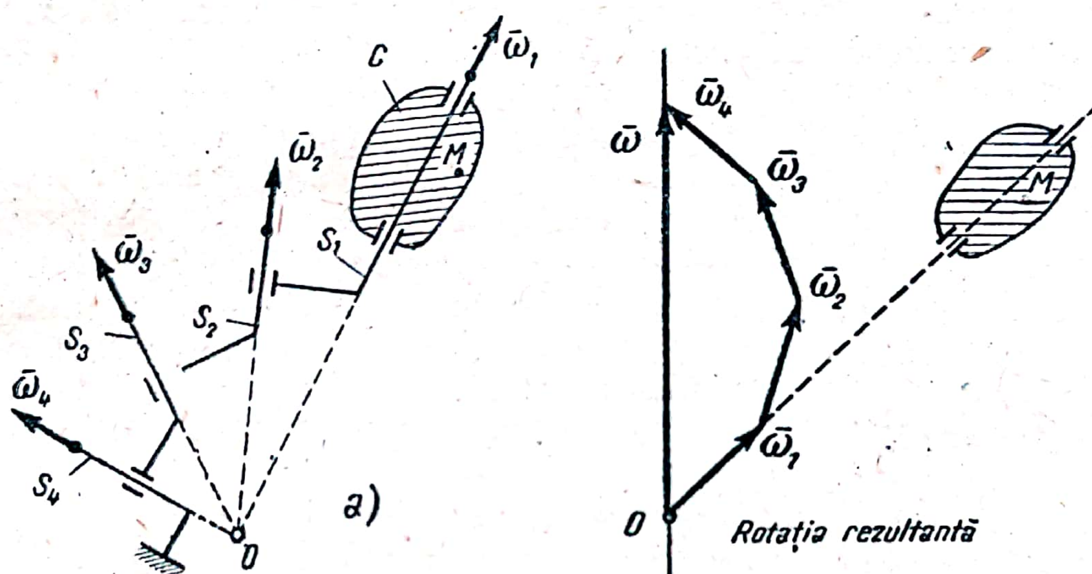


Fig. 7.9.

temul de referinţă S_2 şi adunînd-o cu viteza de transport (viteza punctului M considerat solidar cu sistemul S_2 faţă de sistemul de referinţă S_3) ş.a.m.d. pînă ce ultimul sistem de referinţă faţă de care se calculează viteza punctului M este sistemul de referinţă fix, vom obţine viteza punctului M faţă de acest sistem; ea este reprezentată de suma momentelor vectorilor $\bar{\omega}$ în raport cu punctul M.

Cum vectorii $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_n$ formează un sistem de vectori concurenţi, în baza teoremei lui Varignon rezultă că suma momentelor vectorilor $\bar{\omega}$ în raport cu punctul M este egală cu momentul rezultantei în raport cu acelaşi punct.

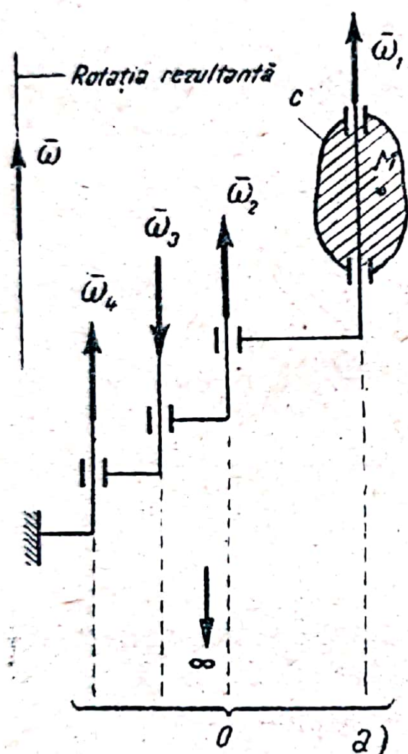
Rezultanta $\bar{\omega}$ are expresia

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots + \bar{\omega}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_i \qquad (7.12)$$

Rezultatul obţinut poate fi enunţat astfel: *prin compunerea unui număr oarecare de mişcări de rotaţie cu axele concurente*

într-un punct O fix în spațiu se obține o mişcare rezultantă de rotație, a cărei axă trece tot prin punctul O; viteza unghiulară ω mişcării rezultante este egală cu suma vectorială a vitezelor unghiulare instantanee ale mişcărilor componente (fig. 7.9,*b*).

Faptul că mişcările de rotație componente sînt rotații instantanee se interpretează în sensul că vitezele unghiulare ω_i ale acestor mişcări îşi pot schimba atît mărimea cît şi orientarea de la un moment la altul, putînd rămîne sau nu concurente în *O*; legea de găsire a vitezei unghiulare rezultante exprimată prin relația (7.12) îşi păstrează valabilitatea pentru orice moment în care axele tuturor rotațiilor sînt concurente.



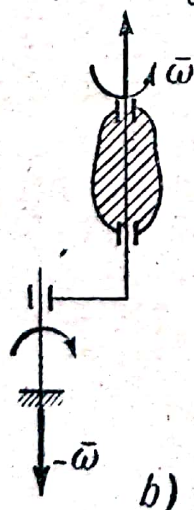


Fig. 7.10.

În baza analogiei dintre viteza unghiulară şi vectorul forță rezultă că modul de obținere a vitezei unghiulare ω este analog celui prin care se obține rezultanta unui sistem de forțe concurente (fig. 7.9, *b*).

c) **Compuneri de rotații paralele simultane.** Să presupunem acum că punctul de intersecție *O* a axelor instantanee de rotație ale mişcărilor componente se depărtează la infinit; în acest caz, va trebui să compunem un număr de rotații paralele simultane (fig. 7.10, *a*).

Notarea vitezelor unghiulare de rotație ale mişcărilor componente de la cazul precedent al compunerii rotațiilor concurente rămîne valabilă şi în acest caz.

Metoda de rezolvare a acestui caz va fi similară celei folosite în cazul precedent cu singura deosebire că punctul de intersecție al axelor va fi la infinit.

Un caz particular al compunerii rotațiilor paralele este acela al compunerii a două rotații paralele, egale şi de sensuri contrare (cuplu de rotații), arătat în figura 7.10, *b*. Mişcarea rezultantă este o translație, după cum se poate constata şi din următoarea experiență simplă: se ia o foaie de hîrtie şi se ro-

tește pe masă în jurul a două axe perpendiculare pe planul său, în sensuri contrare, de un același unghi; foaia se deplasează din poziția inițială în poziția finală ca și cum ar fi executat o translație în planul mesei.

Fără a mai relua demonstrația acestui caz vom enunța rezultatul astfel: *prin compunerea unui număr oarecare de mișcări de rotație cu axele paralele se obține o mișcare rezultantă de rotație sau de translație după cum* $\Sigma\overline{\omega}_i \neq 0$ *sau* $\Sigma\overline{\omega}_i = 0$; *în primul caz, viteza unghiulară a mișcării rezultante este egală cu suma vectorială (vectori coliniari) a vitezelor unghiulare instantanee ale mișcărilor componente; ea trece prin centrul vectorilor paraleli.*

d) **Alte cazuri de compuneri de mișcări simultane ale solidului rigid.** În afară cazurilor examinate se mai întîlnesc și alte compuneri de mișcări simultane ale solidului rigid. Doua dintre ele au fost studiate la mișcarea solidului rigid, și anume:

— din compunerea unei translații cu o rotație avînd axa paralelă cu aceea a translației rezultă o mișcare elicoidală;

— din compunerea unei translații cu o rotație avînd axa perpendiculară pe aceea a translației rezultă o mișcare plan-paralelă.

De fapt, toate cazurile studiate pînă aci sînt cazuri particulare ale compunerii mai multor mișcări elicoidale instantanee; într-adevăr, atît mișcarea de translație cît și cea de rotație sînt cazuri particulare ale mișcării elicoidale. Nu vom demonstra acest caz, ci vom enunța doar rezultantul: *din compunerea unui număr oarecare de mișcări avînd distribuții de viteze caracteristice mișcărilor elicoidale instantanee se obține o mișcare rezultantă avînd o distribuție de viteze caracteristică unei mișcări elicoidale.* Prin particularizarea acestui caz se obțin toate cazurile de compuneri de mișcări studiate pînă aci.

3. Aplicații

a) Se consideră o camă triunghiulară care se deplasează cu viteza $\overline{v}_0$.

Profilul camei este format dintr-o linie dreaptă înclinată cu unghiul α față de direcția mișcării camei. Ea pune în mișcare un tachet care se deplasează vertical într-un ghidaj. Se

cere viteza $\overline{v}$ cu care se deplasează tachetul şi viteza relativă $\overline{v_r}$ de alunecare a tachetului pe camă (fig. 7.11, *a*).

R e z o l v a r e

Vom studia mişcarea punctului *M* de contact dintre tachet şi camă considerînd drept sistem de referinţă fix ghidajul tachetului şi drept sistem de referinţă mobil cama. Cele trei viteze ale punctului *M* sînt :

— viteza absolută este viteza punctului *M* faţă de ghidajul tachetului ; se cunoaşte numai direcţia sa, deoarece tachetul are o mişcare de translaţie rectilinie ;

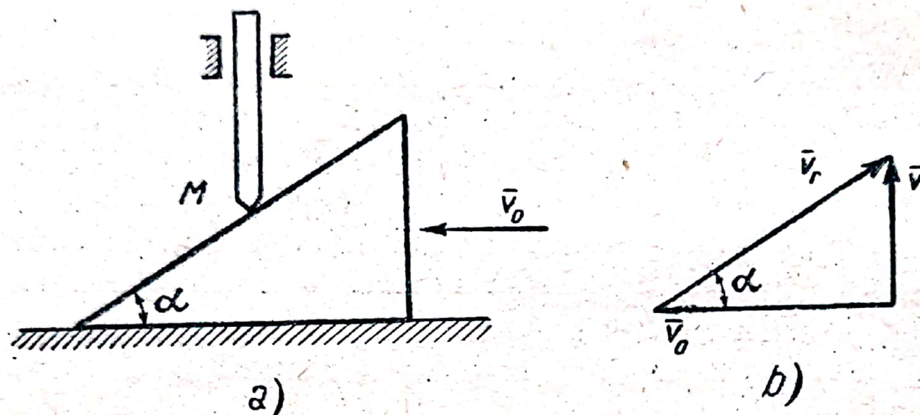


Fig. 7.11.

— viteza relativă este viteza punctului *M* faţă de camă ; se cunoaşte direcţia sa, deoarece ea este dirijată în lungul profilului camei ;

— viteza de transport este viteza punctului *M* dacă acesta ar fi solidar cu cama ; ea este chiar viteza $\overline{v}_0(\overline{v}_t = \overline{v}_0)$.

Relaţia (7.10) :

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_t$$

construită grafic este arătată în figura 7.11, *b*.

Din triunghiul vitezelor rezultă :

$$v_a = v_0 \text{ tg } \alpha,$$

$$v_r = \frac{v_0}{\cos \alpha}.$$

Deoarece tachetul are o mişcare de translaţie, toate punctele sale vor avea viteza $\overline{v}$.

Se observă că atît viteza de deplasare a tachetului cît şi viteza sa relativă cresc o dată cu creşterea unghiului α.

b) Se consideră un rulment radial cu bile; arborele are o turaţie $n_2 = 300$ rot/min. Se cere să se determine turaţia unei bile a rulmentului în jurul axei sale (fig. 7.12, *a*). Rulmentul are raza inelului interior $R = 80$ mm şi diametrul bilei $d \approx 40$ mm.

Rezolvare

Vom presupune că bilele rulmentului se rostogolesc fără să alunece atît pe inelul interior al rulmentului, care este solidar cu arborele, cît şi pe cel exterior, care este fix în lagăr.

Dacă alegem arborele drept sistem de referinţă mobil şi lagărul drept sistem de referinţă fix, deosebim următoarele mişcări ale bilei rulmentului:

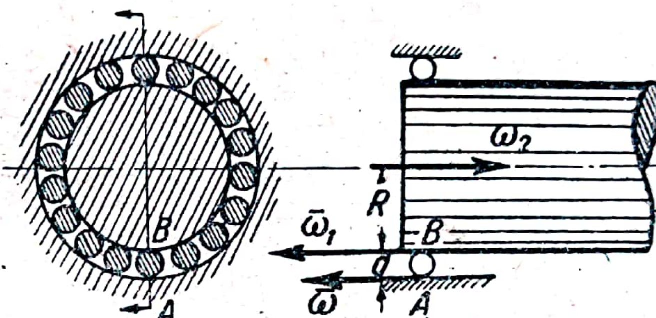


Fig. 7.12.

— mişcarea absolută este mişcarea bilei faţă de lagăr; ea este o mişcare plan-paralelă sau o rotaţie instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ trecînd prin punctul A de contact al bilei cu inelul exterior;

— mişcarea relativă este mişcarea bilei faţă de arbore; ea este tot o mişcare plan-paralelă sau o rotaţie instantanee cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ trecînd prin punctul B de contact al bilei cu inelul interior;

— mişcarea de transport este mişcarea arborelui cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$.

Mişcarea rulmentului faţă de lagăr poate fi considerată ca rezultînd din compunerea a două rotaţii paralele (fig. 7.12 *b*). Rezultă deci:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\omega_2 (R + d) - \omega_1 d = 0,$$

de unde:

$$\omega = \frac{R}{d} \omega_2;$$

$$n = \frac{30\,\omega}{\pi} = \frac{30}{\pi} \frac{R}{d} \omega_1 = \frac{30}{\pi} \times \frac{80}{40} \times \frac{\pi \times 300}{30} = 600 \text{ rot/min.}$$

Capitolul VIII

APLICAŢIILE TEHNICE ALE CINEMATICII

În capitolele cinematicii studiate pînă aci ne-am ocupat de mişcarea punctului material şi a solidului rigid; în tehnică nu se întîlnesc însă punctele materiale sau corpuri solide izolate, ci mecanisme, maşini, instalaţii conţinînd mai multe corpuri solide aflate în mişcare, astfel încît mişcările diferitelor corpuri care le alcătuiesc depind una de alta datorită interacţiunii corpurilor. Asemenea ansambluri de corpuri care interacţionează în timpul mişcării formează, după cum ştim, sisteme de corpuri. În cele ce urmează ne vom ocupa de cîteva sisteme de corpuri care au o utilizare mai largă în tehnică. Vom trata numai sisteme de corpuri avînd un singur grad de libertate, la care vom determina relaţiile dintre vitezele diferitelor corpuri care alcătuiesc sistemul respectiv.

1. Mecanisme cu elemente flexibile

Pentru transmiterea mişcării de rotaţie între arbori situaţi la distanţă mare se folosesc mecanisme cu elemente flexibile: curele, benzi, cabluri, lanţuri. Astfel, transmiisile cu benzi sînt folosite la transportoarele care servesc la mecanizarea transporturilor materialelor vărsate şi granuloase; transmisiile cu cabluri sînt utilizate la maşinile de ridicat din industria grea sau a construcţiilor, care folosesc scripeţi, tambure, cilindri, cabestane; transmisiile cu curele sînt întrebuinţate în industria grea, în industria uşoară sau a construcţiilor; transmisiile cu lanţuri înlocuisc pe cele cu cabluri sau curele în cazul eforturilor mari sau cînd se cere ca raportul de transmisie să fie riguros constant, fără variaţii, aşa cum se întîmplă în timpul patinării pe tambure a curelelor sau cablurilor.

O transmisie cu curea se compune din două roţi I şi II şi o curea întinsă peste ele; dacă cele două roţi au acelaşi sens de rotaţie, transmisiile se numesc *directe* (fig. 8.1, *a*), iar dacă ele au sensuri contrare de rotaţie, se numesc *inverse sau cu curea încrucişată* (fig.8.1,*b*).

Pentru studiul cinematic al unei transmisii cu curea vom presupune că nu există alunecare între curea şi roţi, iar cureaua nu se deformează în timpul mişcării.

Parametrii geometrici care caracterizează mişcarea celor două roţi considerate ca solid cu axă fixă sînt unghiurile $\theta_1 = \theta_1(t)$ şi $\theta_2 = \theta_2(t)$. Relaţia dintre ei se află astfel : în timp ce punctul A de la periferia roţii I a parcurs drumul $AA' = R_1\theta_1$, punctul B de la periferia roţii II a parcurs drumul $BB' = R_2\theta_2$; cureaua fiind inextensibilă, aceste două drumuri trebuie să fie egale, adică :

$$R_1\theta_1 = R_2\theta_2.$$

a)

Prin derivare obţinem :

$$R_1\dot{\theta}_1 = R_2\dot{\theta}_2,$$

sau

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2.$$

Ţinînd seama şi de relaţia dintre viteza unghiulară şi turaţie $\left(\omega = \frac{\pi n}{30}\right)$ rezultă.

b)

Fig. 8.1.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{R_2}{R_1} = \pm\frac{D_2}{D_1} = \frac{n_1}{n_2} = \pm i. \tag{8.1}$$

Mărimea i poartă denumirea de *raport de transmitere* ; se va lua semnul + pentru rotaţia în acelaşi sens şi semnul — pentru rotaţiile în sensuri contrare.

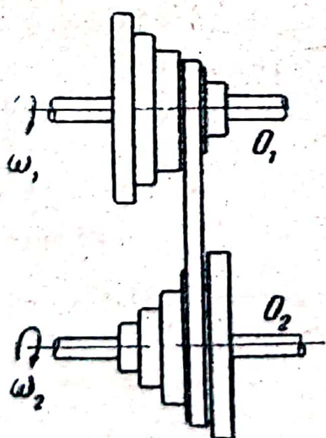


Fig. 8.2.

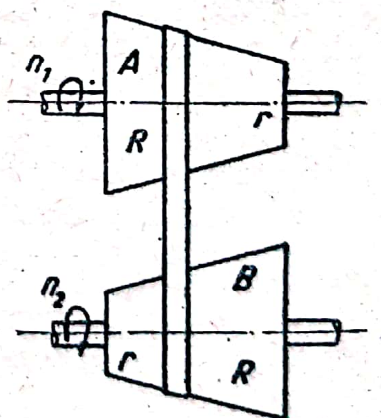


Fig. 8.3.

Pentru a se obţine diferite viteze la arborele condus se folosesc *schimbători de viteză în trepte* (fig. 8.2) constituiţi din

două conuri în trepte, identice, plasate invers pe doi arbori în paralel O_1 şi O_2 peste care este trecută o curea continuă. Arborelui O_1 i se imprimă o turaţie constantă în timp ce la arborele condus O_2 se obţin atîtea turaţii cîte trepte are conul.

În figura 8.3 este arătat un variator continuu de viteze cu ajutorul căruia prin deplasarea curelei, raportul de transmitere poate fi variat între limitele date de relaţia :

$$\frac{R}{r} \leqslant i \leqslant \frac{r}{R} \left(i = \frac{n_1}{n_2} \right). \qquad (8.2)$$

2. Mecanisme cu roţi

În cazul în care cele două axe între care trebuie transmisă mişcarea se află unul în apropierea celuilalt, se întrebuinţează o *transmisie prin roţi* aflate în contact direct. Axele celor două roţi pot avea una dintre poziţiile : paralele, concurente sau oarecare. Transmiterea mişcării de rotaţie între doi arbori se poate face prin *roţi cu fricţiune* sau prin *roţi dinţate*. Transmisia prin roţi dinţate se întrebuinţează în special atunci cînd se cere asigurarea unei anumite viteze unghiulare şi cînd se transmit puteri relativi mari (la reductoare, mecanisme planetare etc.).

Elementul conducător are în general o mişcare de rotaţie uniformă ; elementul condus poate avea fie o mişcare de rotaţie uniformă (la transmisii prin roţi dinţate, cilindrice sau conice, roţi de fricţiune), fie o mişcare de rotaţie variată (la transmisii prin angrenaje eliptice sau dreptunghiulare sau la variatorii de viteză), fie o mişcare de rotaţie intermitentă (la transmisiile prin roţi de malta, roţi cu clichet etc.).

În general, roţile aflate în contact direct se pot prezenta în două cazuri : *tangente exterioare* şi *tangente interioare*.

a) **Transmisii cu roţi de fricţiune.** Într-o transmisie prin roţi de fricţiune, între roţi, în punctul lor de contact, nu au loc deplasări relative. Mişcarea relativă a roţilor este o rostogolire fără alunecare ; punctele de contact ale celor două roţi au aceeaşi viteză pe fiecare dintere ele.

Pentru ca raportul de transmitere să fie constant, trebuie ca coeficientul de frecare să fie atît de mare încît forţa de frecare ce ia naştere la contactul celor două roţi să nu permită

alunecarea lor relativă. Pentru aceasta, cele două roţi se presează una contra celeilalte cu o anumită forţă, iar adeziunea dintre suprafeţele celor două roţi aflate în contact se măreşte folosind pentru una dintre roţi (de obicei pentru cea mică) materiale ca : piele, fibră, lemn avînd un coeficient de frecare mare.

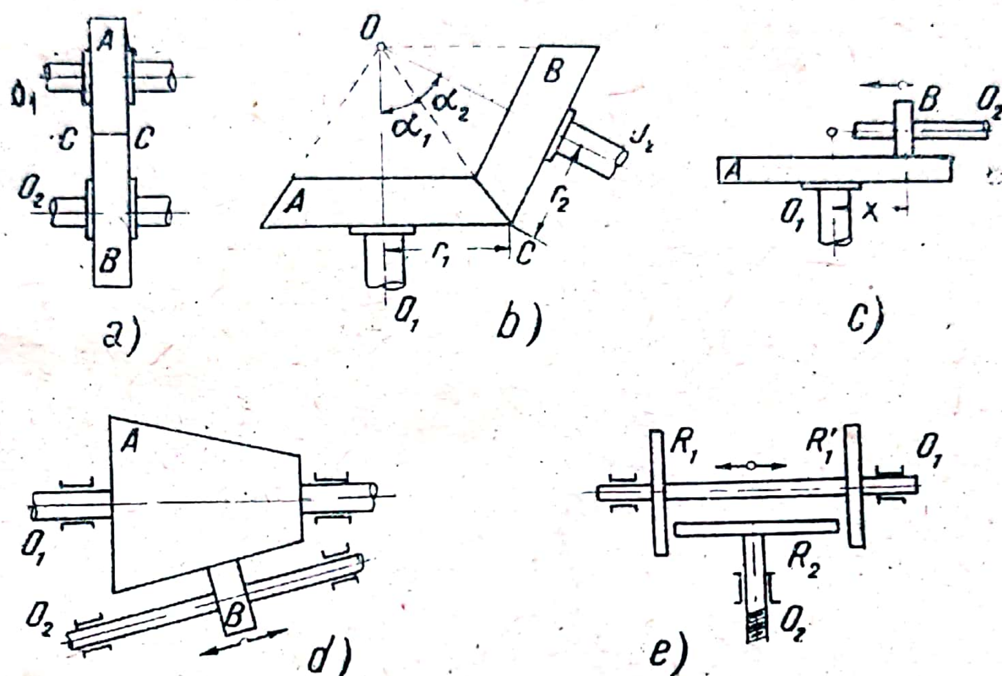


Fig. 8.4.

În figura 8.4 sînt arătate diferite tipuri de roţi de fricţiune : cilindrice (*a*), conice (*b*), sub formă de tambur (*d*) ; în figura 8.4, *c* şi *d* sînt arătaţi doi variatori de viteză, iar în figura 8.4, *e* o presă de fricţiune.

În cazul roţilor cilindrice, exprimînd că viteza punctului de contact este aceeaşi se obţine :

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

(ω_1 şi ω_2 sînt vitezele unghiulare, r_1 şi r_2 — razele roţilor). Notînd prin n_1 şi n_2 turaţiile celor două roţi, se obţine :

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}. \qquad (8.3)$$

Raportul de transmitere i se consideră ca şi în cazul transmisiei prin curele cu semn pozitiv sau negativ după cum vitezele unghiulare ale roţilor au sau nu acelaşi sens.

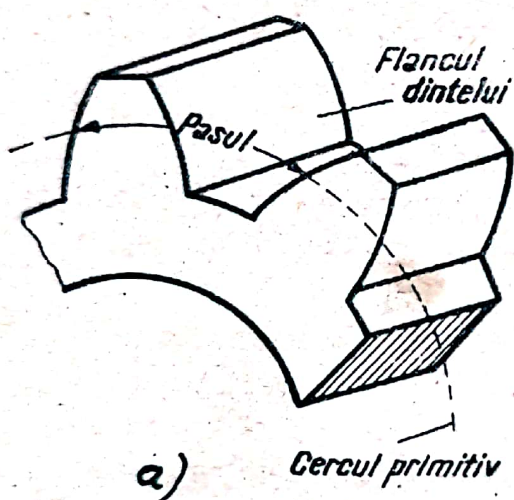
b) **Transmisii cu roţi dinţate** (angrenaje). În general, se numeşte *angrenaj* o transmisie compusă din două roţi dinţate sau dintr-o roată dinţată şi o cremalieră montate astfel încît dinţii unei roţi să intre în golurile celeilalte.

Transmisiile prin angrenaje sînt folosite pentru a evita nesiguranţa provocată de variaţia vitezei unghiulare de la transmisiile prin roţi cu fricţiune datorită unor factori accidentali care pot provoca lunecări în punctele de contact.

Caracteristicile principale ale unei roţi dinţate sînt (fig. 8.5, *a*) :

Cercul primitiv, care reprezintă secţiunea roţii primitive; după STAS 915—50 se numesc roţi primitive limitele către care tind roţile unui angrenaj, al cărui număr de dinţi creşte către infinit, în timp ce înălţimea lor se micşorează tinzînd către zero.

Pasul roţii dinţate este distanţa *p* dintre profilele de acelaşi sens a doi dinţi consecutivi, măsurată pe cercul primitiv (fig. 8.5, *a*).



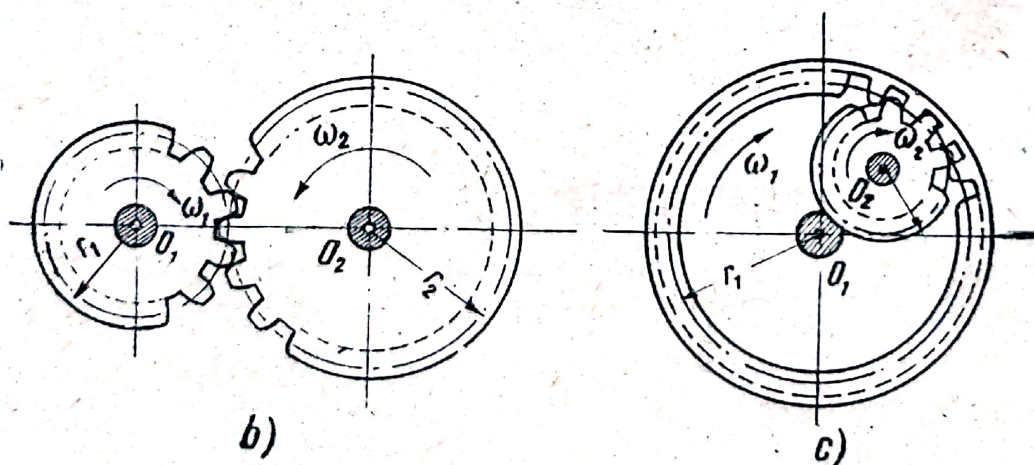


Fig. 8.5.

Modulul roţii dinţate este lungimea care revine pe diametrul cercului primitiv pentru un dinte al roţii :

$$m = \frac{d}{z}, \tag{8.4}$$

unde z este numărul dinţilor, iar d diametrul primitiv. Pasul roţii se exprimă ca funcţie de modul prin relaţia :

$$p = \frac{\pi d}{z} = \pi m. \tag{8.5}$$

Pentru ca două roţi dinţate se poate fi angrenate, ele trebuie să aibă acelaşi modul şi acelaşi profil al dinţilor.

c) **Angrenajele cilindrice** sînt angrenajele formate din două roţi dinţate, avînd dinţii dispuşi pe periferiile a doi cilindri în lungul generatoarelor lor. Aceste angrenaje au axele paralele. În figura 8.5 se arată două angrenaje cilindrice : b) exterior c) interior.

Raportul de transmitere se obţine pe aceleaşi considerente ca mai sus ; el are expresia :

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}, \tag{8.6}$$

limitele între care poate varia fiind $\frac{1}{10}$ şi 10.

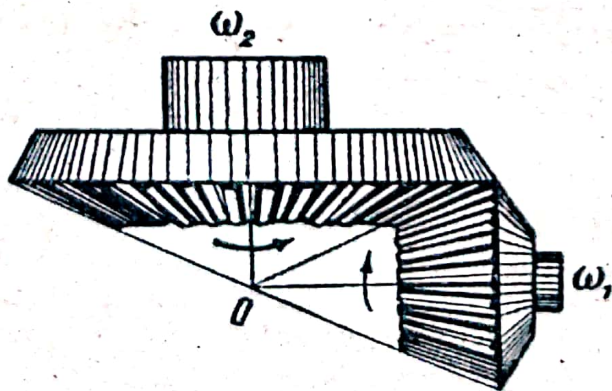


Fig. 8.6.

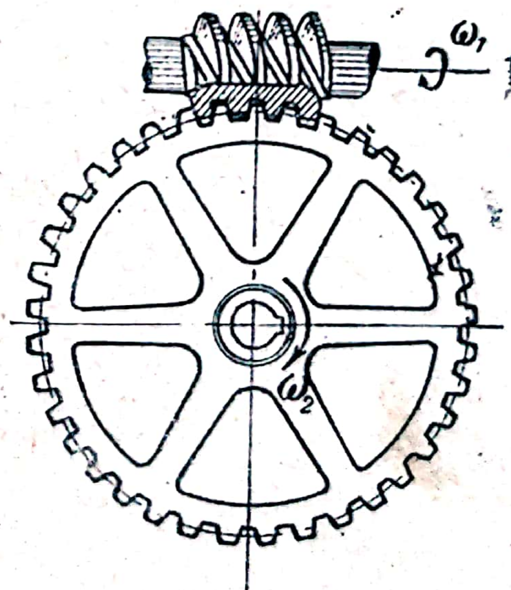


Fig. 8.7.

d) **Angrenajele conice** (fig. 8.6) se folosesc pentru a transmite mişcarea de la un arbore la altul concurent cu primul pentru ca angrenajul conic să funcţioneze trebuie ca vîrfurile celor două conuri din care fac parte roţile dinţate să coincidă.

Raportul de transmitere are aceeaşi valoare ca şi în cazul angrenajelor cilindrice (8.6).

e) **Angrenajul cu melc** (angrenajul melc — roată melcată), cunoscut şi sub denumirea de *angrenaj cu şurub fără sfîrşit*, este folosit în cazul cînd cei doi arbori sînt perpendiculari. Melcul este un şurub, iar roata melcată este o roată dinţată care angrenează cu melcul. Dinţii roţii melcate sînt înclinaţi faţă de generatoarele suprafeţei cilindrice iniţiale a roţii. Pentru ca funcţionarea să fie posibilă, trebuie ca pasul melcului să fie egal cu pasul danturii roţii (fig. 8.7).

Pentru determinarea raportului de transmitere procedăm astfel: presupunem că roata melcată are z dinţi; în timp ce melcul se roteşte complet o dată, adică efectuează $\theta_1 = 2\pi$ radiani, roata melcată se roteşte cu un pas, adică cu $\theta_2 = 2\pi/z$ radiani; rezultă:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = z,$$

care prin derivare conduce la:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = z. \tag{8.7}$$

Dacă melcul are un număr q de începuturi, atunci raportul de transmitere este:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z}{q}. \tag{8.8}$$

Mecanismul funcţionează ca reductor de turaţie; el nu este reversibil, transmiterea mişcării de la roată la şurub fiind împiedicată de autofrînare.

f) **Angrenajele cu roată dinţată şi cremalieră** (fig. 8.8) se compun dintr-o roată dinţată cilindrică angrenată cu o bară dreaptă dinţată şi servesc la transformarea unei mişcări de rotaţie într-o mişcare de translaţie, şi viceversa. Angrenajele cu roată dinţată şi cremalieră se întrebuinţează la maşini-unelte, cricuri etc.

Dacă se notează cu v viteza de translaţie a cremalierei şi cu ω viteza unghiulară de rotaţie a roţii dinţate, pe baza egalităţii vitezelor în punctul de contact se poate scrie:

$$v = R\omega. \tag{8.9}$$

g) **Trenuri cu roţi dinţate.** Pentru transmiterea mişcării între axe paralele situate la o distanţă mai mare, se folosesc trenuri (serii) de roţi dinţate (fig. 8.9), la care între roata conducătoare a şi roata condusă d se introduc o serie de roţi intermediare.

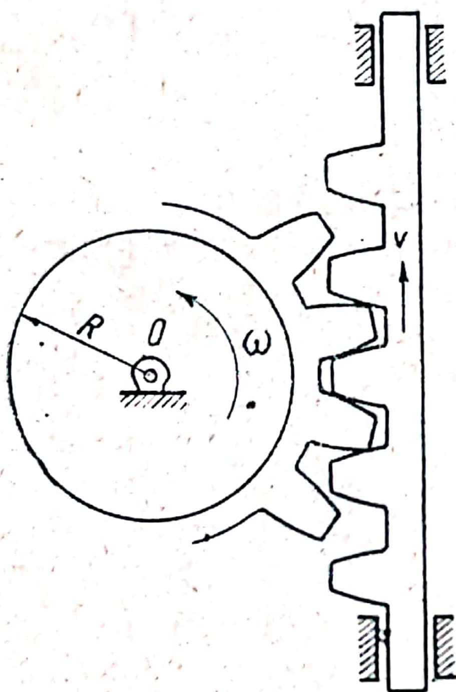


Fig. 8.8.

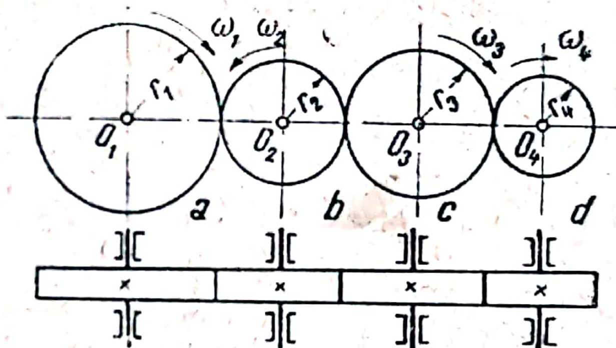


Fig. 8.9.

Raportul de transmitere se determină din aproape în aproape considerînd angrenajele parţiale formate din roţile a—b, b—c, c—d; notînd cu i_1, i_2, i_3 rapoartele de transmitere parţiale, avem:

$$i_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_2 = \frac{n_2}{n_3} = \frac{z_3}{z_2}, \quad i_3 = \frac{n_3}{n_4} = \frac{z_4}{z_3},$$

de unde, prin înmulţire obţinem:

$$i = i_1 i_2 i_3 = \frac{n_1}{n_4} = \frac{z_4}{z_1}. \tag{8.10}$$

Se observă că raportul de transmitere nu depinde de numărul de dinţi ai roţilor intermediare, ci are aceeaşi valoare ca şi cînd roţile extreme a şi d ar fi angrenate direct.

În figura 8.10 este arătat un angrenaj care este folosit într-un reductor de turaţie; cele două roţi de pe axul 2 şi cele două roţi de pe axul 3 sînt asamblate împreună. Rapoartele de transmitere sînt:

$$i_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{r_1}, \quad i_2 = \frac{n_2}{n_3} = \frac{R_3}{r_2}, \quad i_3 = \frac{n_3}{n_4} = \frac{R_4}{r_3}.$$

Raportul de transmitere total este:

$$i = i_1 i_2 i_3 = \frac{n_1}{n_4} = \frac{R_2 R_3 R_4}{r_1 r_2 r_3}. \quad (8.11)$$

h) **Transmisiile cu roţi dinţate elicoidale** (fig. 8.11) servesc la transmiterea mişcării de rotaţie a doi arbori ale căror axe

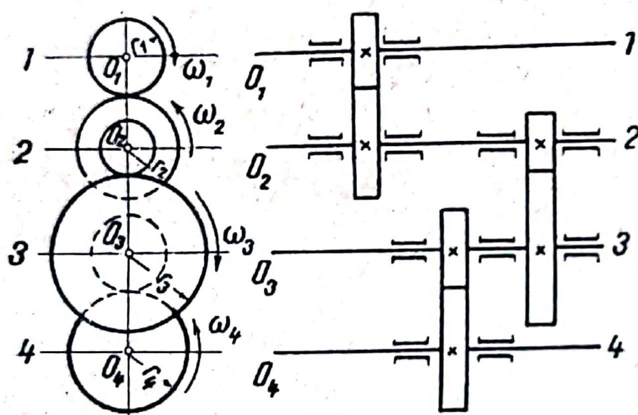


Fig. 8.10.

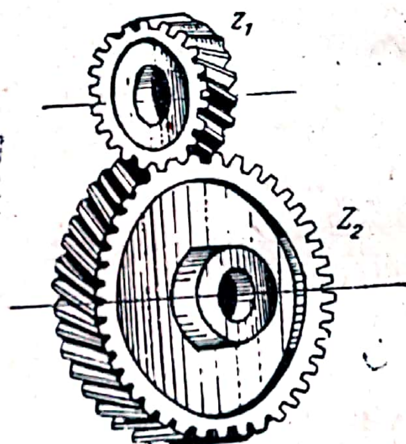


Fig. 8.11.

sînt oarecum în spaţiu (de obicei perpendiculare) şi la care nu se cere un raport prea mic de transmisie.

Roţile cu dinţi elicoidali se prezintă sub forma unor porţiuni de şurub avînd mai multe filete care se angrenează; numărul filetelor corespunde cu numărul dinţilor unei roţi dinţate obişnuite. Dacă roata conducătoare are z_1 filete, iar cea condusă z_2 filete, raportul de transmitere va fi:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Pentru ca o asemenea transmisie să poată funcţiona, este necesar ca lăţimea golurilor şi grosimea filetelor măsurate pe perpendiculara la axa şurubului să fie egale la ambele roţi. Suma lăţimii unui gol cu grosimea filetului formează aşa-zisul

pas normal al roţii elicoidale, pe care nu trebuie să-l confundăm cu *pasul aparent* măsurat la periferia elicei; diferenţa dintre ele este arătată pe figura 8.12. La roţile dinţate cu dinţi drepţi, pasul normal şi cel aparent coincid.

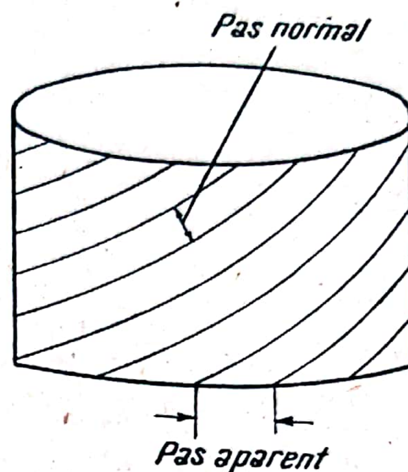


Fig. 8.12.

Avantajul cel mai mare al transmisiei cu roţi dinţate elicoidale, ca de altfel şi în cazul transmisiei cu melc roată melcată, constă în aceea că ea funcţionează foarte lin, fără smucituri. Dezavantajul acestei transmisii, ca de altfel al tuturor transmisiilor cu şurub, constă în aceea că în timpul mişcării cele două suprafeţe de contact ale dinţilor lunecă una pe cealaltă, fapt pentru care din cauza frecării aceste transmisii se încălzesc în timpul funcţionării; din acest motiv, trebuie dată o atenţie deosebită răcirii transmisiei în timpul funcţionării sale.

3. Aplicaţii

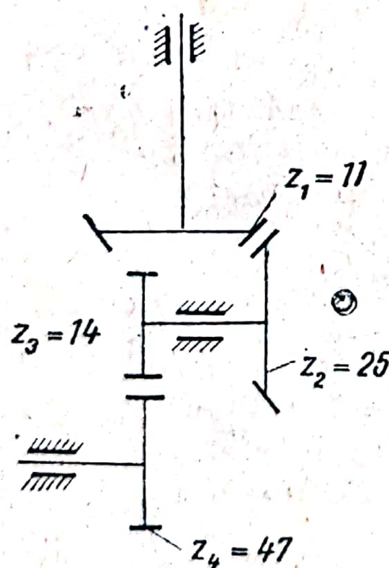


Fig. 8.13.

a) În figura 8.13 este desenată schematic transmisia de la pinionul conic pînă la carcasa diferenţialului autocamionului SR 101 fabricat în R.P.R., la uzinele „Steagul roşu" din Braşov. Se cere să se calculeze raportul de transmitere al acestui angrenaj.

Rezolvare

După formula (8.1) avem:

$$i = \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{47}{14} \times \frac{25}{11} = 7{,}6.$$

b) În figura 8.14 este reprezentată schematic (fig. 8.14, *a*) cutia de viteze a tractorului KD 35 fabricat în R.P.R., la uzinele „Uzinele de tractoare—Braşov" împreună cu schema de cuplare

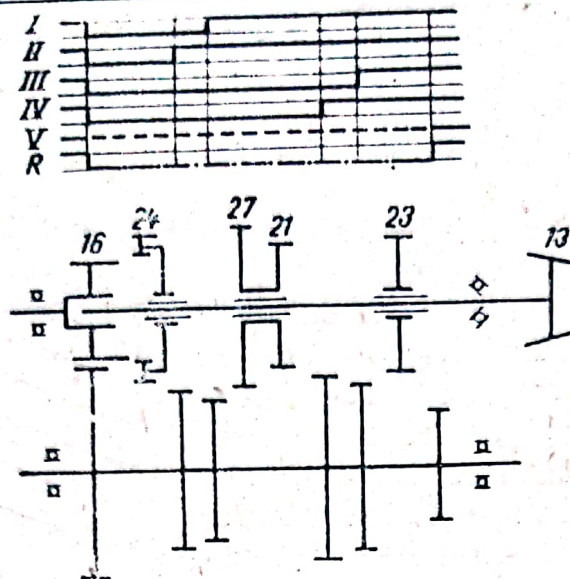


Fig. 8.14, *a*

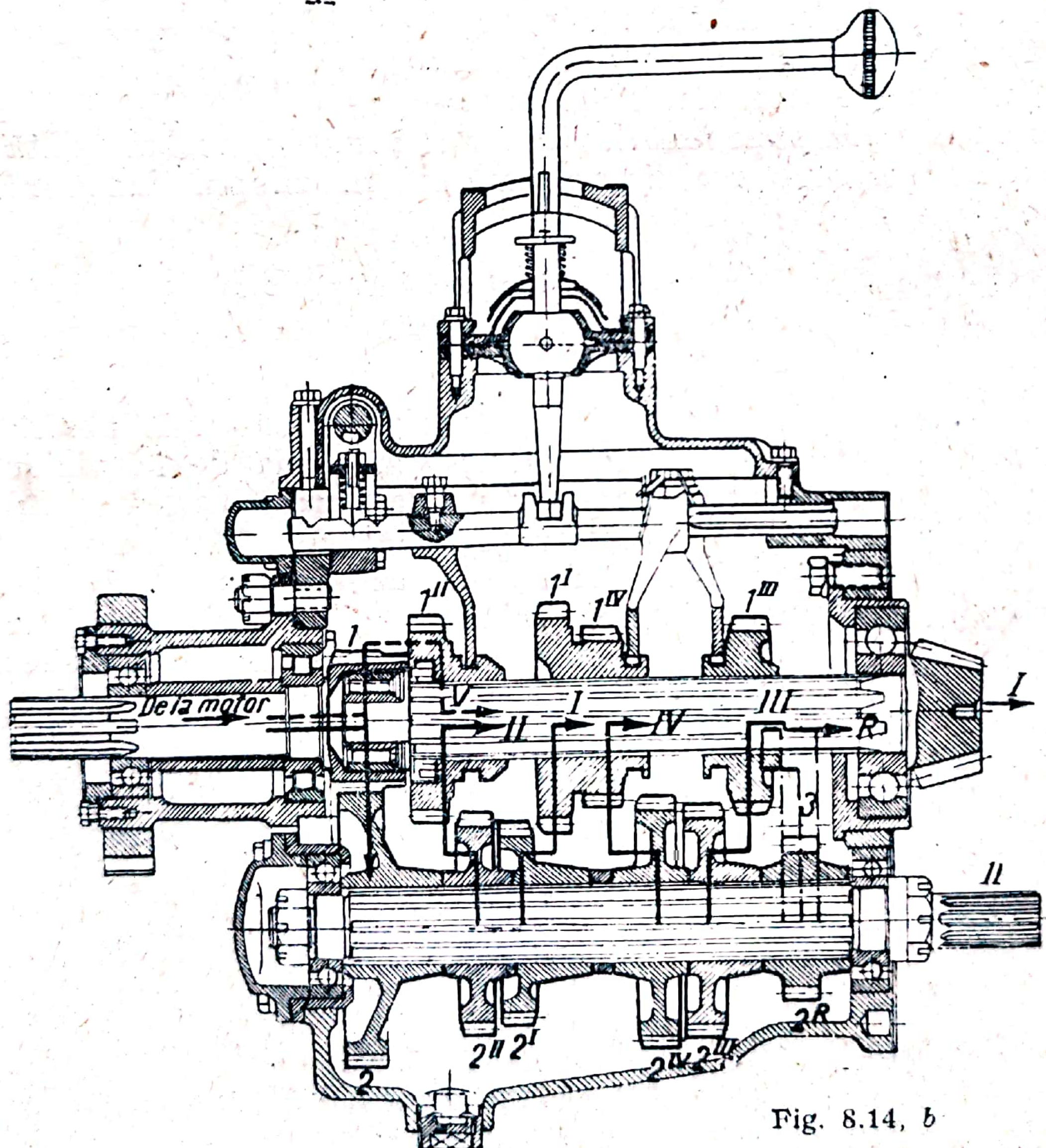


Fig. 8.14, *b*

a vitezelor (fig. 8.14, *b*). Cu ajutorul acestei cutii de viteze se realizează cinci viteze înainte şi una înapoi, conform schemei de cuplare.

Se cere să se determine rapoartele de transmitere pentru toate cele şase viteze realizate.

R e z o l v a r e

Folosind schema din figura 8.14 şi formula (8.1) obţinem:

$$i_I = \frac{z_1^I}{z_2^I} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{27}{24} \cdot \frac{34}{16} = 2{,}39,$$

$$i_{II} = \frac{z_1^{II}}{z_2^{II}} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{24}{26} \cdot \frac{34}{16} = 1{,}96,$$

$$i_{III} = \frac{z_1^{III}}{z_2^{III}} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{23}{28} \cdot \frac{34}{16} = 1{,}74,$$

$$i_{IV} = \frac{z_1^{IV}}{z_2^{IV}} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{21}{30} \cdot \frac{34}{16} = 1{,}48,$$

$$i_V = 1,$$

$$i_R = \frac{z_1^{III}}{z_i^V} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{23}{24} \cdot \frac{34}{16} = 2{,}44.$$

Partea a IV-a

DINAMICA SISTEMELOR MATERIALE

Capitolul IX

PROBLEMELE GENERALE; NOȚIUNI INTRODUCTIVE IN DINAMICĂ

1. Obiectul dinamicii

Dinamica este acea parte a mecanicii care studiază mişcarea mecanică a corpurilor solide în legătură cu forţele care acţionează asupra acestora.

Problemele dinamicii se împarte în trei categorii, şi anume:

probleme directe sînt acele probleme în care se cunosc toate forţele exterioare care acţionează corpul, caracteristicile mecanice şi geometrice ale acestuia, precum şi poziţia şi starea sa de mişcare la un moment dat (condiţiile iniţiale) şi se cere să se determine mişcarea corpului sub acţiunea forţelor date;

probleme inverse sînt acele probleme în care este cunoscută mişcarea corpului, caracteristicile mecanice şi geometrice ale acestuia şi se cer forţele exterioare, care, aplicate solidului, îi provoacă mişcarea dată;

probleme mixte sînt acele probleme în care se cunosc o parte din forţele care acţionează corpul, o parte din caracteristicile mişcării acestuia (elementele de pînă aci sînt determinate de regulă de legăturile solidului, sau sînt impuse), caracteristicile geometrice şi mecanice ale corpului, poziţia şi starea sa de mişcare la un moment dat (condiţiile iniţiale) şi se cere să se determine restul forţelor care acţionează corpul şi restul caracteristicilor mişcării sale. Acestea din urmă se întîlnesc cel mai adesea în aplicaţii.

2. Subîmpărţirile dinamicii ; scurt istoric

În prima parte a dinamicii sînt studiate o serie de noţiuni care formează baza prezentării dinamicii corpurilor ; în continuare se expun metodele generale de rezolvare a problemelor de dinamică, indiferent dacă în aceste probleme apar puncte materiale, corpuri solide rigide sau sisteme de corpuri solide rigide ; aceste metode sînt aplicate apoi la studiul dinamicii acelor corpuri ale căror mişcări au fost studiate în cadrul cinematicii. Studiul dinamicii se încheie cu o serie de aplicaţii în tehnică.

Bazele dinamicii au fost puse de Galileo Galilei şi Isaac Newton ; Lagrange este cel care le-a dat o formă analitică, exprimînd partea teoretică aproape sub forma pe care o cunoaştem astăzi.

La dezvoltarea dinamicii şi-au adus contribuţia şi o serie de alţi savanţi dintre care cităm pe N. E. Jukovski, V. I. Meşcerski şi alţii.

3. Importanţa tehnică a dinamicii

Metodele de studiu ale mişcării şi de determinare a reacţiunilor dinamice au aplicaţii în toate disciplinele care se ocupă cu studiul şi proiectarea organelor mobile ale diferitelor maşini şi instalaţii ; astfel, cu ajutorul metodelor dinamicii se studiază mişcarea şi se dimensionează organele motoarelor, compresoarelor, maşinilor-unelte etc. Alte probleme privind reglajul maşinilor, echilibrarea maselor aflate în mişcare, probleme de mare importanţă în tehnica modernă, nu pot fi tratate decît cu ajutorul metodelor dinamicii.

4. Lucru mecanic

Să observăm diferite activităţi fizice efectuate de om ; un muncitor care sapă întrebuinţează forţa sa musculară pentru a înfige sapa în pămînt, producînd mişcarea sapei şi învingînd o dată cu aceasta forţa rezistentă a pămîntului ; un muncitor care lucrează la ridicarea unei construcţii întrebuinţează forţa sa musculară pentru a putea duce materialele necesare dintr-un loc într-altul, învingînd forţa care se opune acestei mişcări (greutatea materialului împreună cu propria sa greutate).

Fenomenele acestea pot fi observate nu numai în activitatea omului, ci chiar în modul în care o maşină-unealtă prelucrează (aşchiază) metalul pe care-l va transforma într-o piesă a unei maşini : forţa care pune în mişcare scula aşchietoare este folosită spre a învinge forţa rezistentă care ia naştere din cauza deformării metalului ce trebuie prelucrat.

Din examinarea acestor exemple precum şi a multor altora care se întîlnesc în activitatea zilnică, observăm că în timpul efectuării unei activităţi mecanice de felul celor examinate mai sus iau naştere două forţe : o forţă care produce mişcarea, denumită *forţă motoare*, şi o forţă care se opune mişcării, denumită *forţă rezistentă*. În timpul mişcării, atît forţa motoare cît şi forţa rezistentă îşi deplasează punctul de aplicaţie, putînd varia ca mărime sau chiar ca direcţie. O noţiune caracteristică a acestui proces este noţiunea de *lucru mecanic* ; ea reuneşte atît lungimea drumului parcurs de cele două forţe (motoare şi rezistentă) cît şi caracteristicile acestor forţe.

Noţiunea de lucru mecanic a rezultat din necesitatea omului de a măsura într-un anumit mod activitatea depusă de el sau de maşinile-unelte care-l ajutau în activitatea sa ; astfel, omul a constatat că rezultatul acestei munci depinde atît de efortul depus cît şi de drumul parcurs de efort, fiind în cele mai simple cazuri proporţional cu produsul dintre efort şi deplasarea acestui efort, la fel cum momentul unei forţe în raport cu un punct este proporţional cu produsul dintre forţă şi distanţa de la punct la suportul forţei.

a) **Lucru mecanic elementar.** Să considerăm o forţă F care-şi deplasează punctul de aplicaţie de-a lungul unei curbe oarecare (C) ; în timpul acestei deplasări, forţa îşi poate schimba, de la o poziţie la alta a punctului său de aplicaţie, atît modulul cît şi orientarea (fig. 9.1, *a* şi *b*). Să presupunem că în intervalul de timp de la t la $t+\Delta t$ punctul de aplicaţie al forţei F parcurge arcul de curbă de lungime Δs pe curba (C). Unghiul dintre acest arc de curbă, pe care îl vom înlocui în mod aproximativ cu coarda MM_1, şi direcţia forţei F este α ; prin definiţie, vom numi lucrul mecanic elementar al forţei $\bar{F}$ pentru parcurgerea arcului Δs expresia :

$$\Delta L = F\Delta s \cos \alpha. \quad (9.1)$$

Această formulă ne arată că lucrul mecanic elementar poate fi considerat ca produsul dintre deplasarea elementară şi proiecţia forţei pe această deplasare sau ca produsul dintre forţă şi proiecţia deplasării pe direcţia forţei.

Lucrul mecanic este o mărime scalară, care poate fi pozitivă, negativă sau nulă după cum unghiul α este ascuţit, obtuz sau drept.

Lucrul mecanic este nul cînd forţa sau deplasarea sînt nule sau în cazul cînd forţa şi deplasarea sînt perpendiculare.

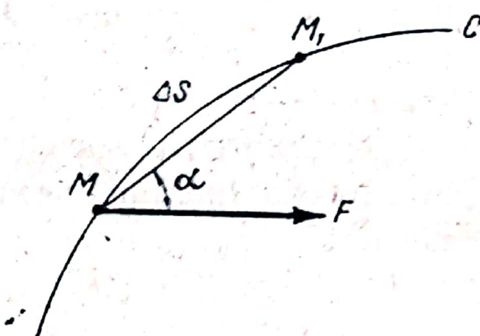


Fig. 9.1, *a*

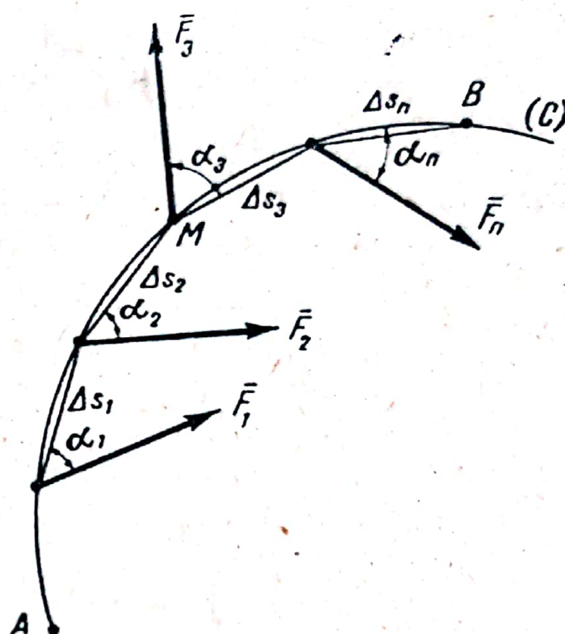


Fig. 9.1, *b*

Lucrul mecanic pozitiv este denumit *lucru mecanic motor* (L_m); el pune în mişcare un mecanism sau o maşină.

Lucrul mecanic negativ este denumit *lucru mecanic rezistent* (L_r), pentru efectuarea căruia trebuie să se consume o energie exterioară.

Lucrul mecanic se măsoară în ergi în sistemul CGS şi în kilograme-forţă-metri în sistemul MKfS, respectiv în jouli în sistemul MKS (v. şi tabela 14.2).

În mod analog se defineşte ca fiind lucrul mecanic elementar al unui cuplu expresia :

$$\Delta L = M \Delta \theta, \tag{9.2}$$

în care M este momentul cuplului, iar $\Delta\theta$ unghiul infinit mic cu care se roteşte cuplul în planul său.

b) **Lucru mecanic total.** Dacă forţa F se deplasează între două poziţii A şi B aflate la distanţă finită una de alta pe curba (C), lucrul mecanic efectuat de forţa $\bar{F}$ se află însumînd lucrurile mecanice elementare corespunzătoare (fig. 9.1, *b*) :

$$L = F_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 + \ldots + F_n \Delta s_n \cos \alpha_n. \tag{9.3}$$

F_1, F_2, ..., F_n fiind modulele forţei $\overline{F}$, care îşi poate schimba în timpul deplasării sale atît mărimea cît şi orientarea.

În mod analog pentru un cuplu avem:

$$L = M_1 \Delta\theta_1 + M_2 \Delta\theta_2 + \dots + M_n \Delta\theta_n \cdot \tag{9.4}$$

Din formula (9.3) rezultă că, în general, lucrul mecanic total al unei forţe depinde atît de forma traiectoriei cît şi de modul în care variază forţa în timpul parcurgerii ei. Pentru cazurile particulare întîlnite în practică, formula (9.1) capătă o formă simplă, cum se va vedea mai jos.

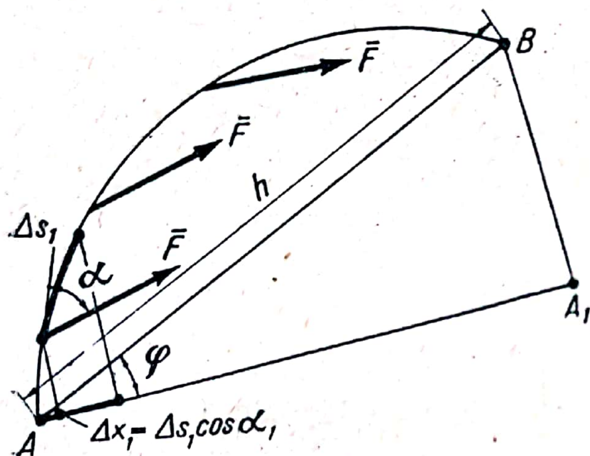


Fig. 9.2.

c) **Cazuri particulare în expresia lucrului mecanic total.** În general, în aplicaţii se întîlneşte frecvent cazul forţei $\overline{F}$ constante în mărime, direcţie şi sens, iar drumul parcurs de originea sa este o curbă oarecare, în particular o dreaptă. În acest caz, se poate arăta că lucrul mecanic total între poziţiile A şi B este egal cu produsul dintre modulul forţei $\overline{F}$ şi proiecţia segmentului $AB = h$ pe direcţia forţei. Într-adevăr, în acest caz putem scrie (fig. 9.2):

$$L = F(\Delta s_1 \cos \alpha_1 + \Delta s_2 \cos \alpha_2 + \dots + \Delta s_n \cos \alpha_n),$$

deoarece forţa $\overline{F}$ rămîne constantă. Dar:

$$\Delta s_1 \cos \alpha_1 = \Delta x_1,\ \Delta s_2 \cos \alpha_2 = \Delta x_2, \dots, \Delta s_n \cos \alpha_n = \Delta x_n,$$

Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n fiind segment ale liniei AA_1 paralele cu direcţia fixă a forţei F.

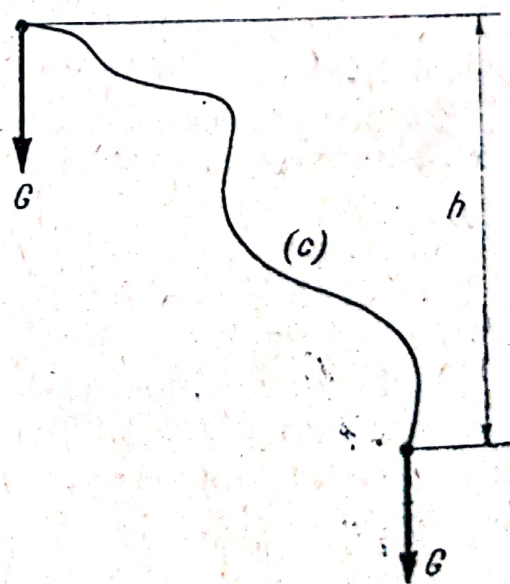


Fig. 9.3.

Înlocuind rezultă :

$$L = F(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = \pm F AA_1 = \pm Fh \cos\varphi, \quad (9.5)$$

semnul plus corespunzînd unghiul $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, iar semnul minus unghiului $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (φ este unghiul dintre dreapta AB și dreapta AA_1 paralelă cu direcția forței $\overline{F}$, unde $BA_1 \perp AA_1$).

Rezultatul obținut este independent de forma curbei C. În particular, dacă AB este paralelă cu F avem $\varphi = 0$ și deci

$$L = \pm Fh. \quad (9.6)$$

Un asemenea caz întîlnim la calculul lucrului mecanic al greutății, unde orice drum ar parcurge punctul său de aplicație, avem întotdeauna (fig. 9.3) :

$$L = \pm Gh, \quad (9.7)$$

după cum parcurgerea se face de sus în jos (+) sau de jos în sus(—).

Dacă curba C este o dreaptă (fig. 9.4), avem :

$$L = F \cdot AA_1 = Fh \cos\varphi. \quad (9.8)$$

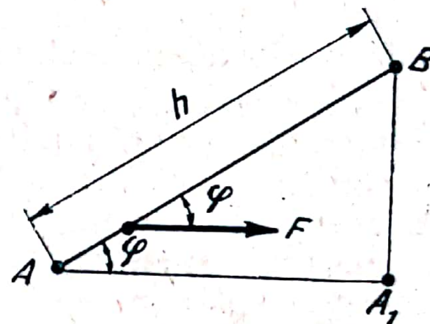


Fig. 9.4.

5. Putere mecanică

Cu timpul, noțiunea de lucru mecanic s-a dovedit a nu fi în măsură să caracterizeze capacitatea mașinilor de a efectua o anumită activitate, deoarece nu ne este indiferent în ce interval de timp se efectuează un anumit lucru mecanic. Trebuia creată o mărime care să deosebească între ele două mașini care produc același lucru mecanic în intervale de timp deosebite; această mărime este *puterea*.

Vom înțelege prin puterea mecanică dezvoltată de o forță $\overline{F}$ raportul dintre lucrul mecanic elementar ΔL și timpul Δt în care acesta a fost efectuat :

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t}. \quad (9.9)$$

Dacă ţinem seama de formula (9.1), puterea P se mai poate scrie :

$$P = \frac{F v \Delta t \cos \alpha}{\Delta t} = F v \cos \alpha, \qquad (9.10)$$

v fiind viteza originii forţei F.

Dacă forţa $\overline{F}$ şi viteza $\overline{v}$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, atunci $\alpha = 0$ şi :

$$P = Fv,$$

ar dacă au sensuri contrare, $\alpha = 180°$ şi

$$P = -Fv.$$

În mod analog puterea unui cuplu are expresia :

$$P = M\omega, \qquad (9.11)$$

ω fiind viteza unghiulară de rotaţie a planului cuplului.

Puterea este o mărime scalară pozitivă, negativă sau nulă ; unitatea de măsură a puterii în sistemul CGS este ergul pe secundă (erg/s), în MKSA joulul pe secundă sau wattul (1 J/s=1 W). În practică se foloseşte kilowattul (1 kW = 1 000 W). Unitatea de putere în sistemul MKfS este kilogramul-forţă-metru pe secundă (kgf·m/s) ; în practică se foloseşte şi calul-putere (1 CP = 75 kgm/s). Între unităţile practice avem relaţiile 1 CP = 0,736 kW, 1 = 1,36 CP.

Noţiunea de putere are largi aplicaţii în tehnică ; ea constituie o caracteristică de bază a tuturor agregatelor energetice, a instalaţiilor producătoare de forţă, a maşinilor etc.

6. Randament mecanic

a) **Randamentul mecanic al unei maşini.** În timpul funcţionării unei maşini, forţa motoare sau cuplul motor produce lucrul mecanic motor L_m, care reprezintă lucrul mecanic cheltuit pentru funcţionarea maşinii în scopul în care ea a fost creată (maşină-unealtă, motor de tracţiune etc.). În acelaşi timp, forţele şi cuplurile rezistente produc un lucru mecanic rezistent L_r. Aceste două lucruri mecanice se pot afla unul faţă de celălalt în următoarele trei situaţii.

— Lucrul mecanic motor este mai mare decît lucrul mecanic rezistent ($L_m > L_r$) ; acest fapt se întîmplă atunci cînd forţele

şi cuplurile motoare sînt mai mari decît forţele şi cuplurile rezistente. În această situaţie, vitezele tuturor organelor mobile ale maşinii cresc, maşina se ambalează. Această situaţie nu poate dura prea mult timp, deoarece vitezele crescînd mereu există pericolul distrugerii maşinii respective. În mod practic, ea se produce la pornirea unei maşini.

— Lucrul mecanic motor este egal cu lucrul mecanic rezistent ($L_m = L_r$) ; acest fapt se întîmplă atunci cînd forţele şi cuplurile motoare echilibrează forţele şi cuplurile rezistente. În această situaţie, vitezele tuturor organelor mobile ale maşinii sînt constante în modul (dacă nu vitezele momentane, cel puţin vitezele medii). În mod practic, ea se produce la mersul de regim al unei maşini.

— Lucrul mecanic motor este mai mic decît lucrul mecanic rezistent ($L_m < L_r$) ; acest fapt se întîmplă atunci cînd forţele şi cuplurile motoare sînt mai mici decît forţele şi cuplurile rezistente. În această situaţie, vitezele tuturor organelor mobile ale maşinii scad ; dacă ea durează mai mult, maşina respectivă se opreşte. În mod practic, această situaţie survine la oprirea oricărei maşini.

Un raţionament analog se putea face cu ajutorul puterilor.

Să analizăm mai îndeaproape lucrul mecanic rezistent L_r. Acesta se compune întotdeauna dintr-o sumă de doi termeni : unul L_u reprezintă lucrul mecanic util, care este lucrul mecanic realizat de maşină pentru scopul în care ea a fost construită (strunjirea unei piese la un strung, ridicarea unei greutăţi la un ascensor etc.). Dar o dată cu funcţionarea maşinii apar şi alte forţe, cum ar fi spre exemplu forţele de frecare, pentru învingerea cărora trebuie cheltuit un lucru mecanic ce nu participă direct la realizarea scopului pentru care a fost construită maşina. Lucrul mecanic consumat într-o maşină pentru învingerea forţelor de frecare şi în general a tuturor rezistenţelor pasive este denumit lucrul mecanic pierdut L_p; el constituie cel de-a doilea termen al lucrului mecanic rezistent. Avem deci :

$$L_r = L_u + L_p.$$

O maşină este evident cu atît mai bine realizată cu cît L_p este mai mic.

În cazul funcţionării de regim a unei maşini avem, după cum am văzut :

$$L_m = L_r = L_u + L_p. \tag{9.12}$$

Din formula (9.12) rezultă că, la regim, întreg lucrul mecanic motor se consumă în lucru mecanic rezistent ; maşina apare astfel ca un transformator de lucru mecanic.

O noţiune importantă care caracterizează orice maşină este noţiunea de *randament* ; ea se defineşte ca raportul dintre lucrul mecanic util şi lucrul mecanic motor ;

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} .$$

Randamentul mecanic (gradul de folosinţă) al unei maşini caracterizează eficacitatea modului său de funcţionare.

Dacă se ţine seama de formula (9.12), randamentul mecanic se scrie şi sub o altă formă, şi anume :

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{L_m - L_p}{L_m} = 1 - \frac{L_p}{L_m} . \qquad (9.13)$$

Raportul $\frac{L_p}{L_m}$ poartă denumirea de *coeficient de pierderi* în maşină.

După cum rezultă din formula (9.13), randamentul este o mărime pozitivă subunitară. Cu cît randamentul este mai mare, adică mai apropiat de unitate, cu atît maşina este mai bună, adică are pierderi mai puţine şi lucrul mecanic util se apropie mai mult de lucrul mecanic motor ; randamentul este deci un coeficient care arată calitatea maşinii ; iată cîteva valori curente ale randamentului la maşini :

— maşini electrice	0,85	. . . 0,95
— maşini hidraulice	0,60	. . . 0,80
— motoare Diesel	0,25	. . . 0,30
— maşini cu abur	0,10	. . . 0,15

Trebuie observat că randamentul unei maşini nu are sens decît pentru mişcarea de regim ; el nu se calculează pentru perioada de pornire sau de oprire a maşinii.

b) **Randamentul total al unui agregat de maşini legate în serie.** Să considerăm un număr oarecare de maşini legate în serie ; caracteristica unui asemenea lanţ de maşini constă în aceea că lucrul util al unei maşini din lanţ devine lucru motor pentru maşina următoare. Avem :

— randamentul fiecărei maşini :

$$\eta_1 = \frac{L_{u_1}}{L_{m_1}} , \ \eta_2 = \frac{L_{u_2}}{L_{m_2}} , \ldots , \ \eta_n = \frac{L_{u_n}}{L_{m_n}} , \qquad (9.14)$$

— randamentul lanţului de maşini:

$$\eta = \frac{L_{u_n}}{L_{m_n}}. \qquad (9.15)$$

Efectuînd produsele randamentelor şi ţinînd seama că $L_{m2} = L_{u1}$, $L_{m3} = L_{u2}$, ... obţinem:

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \ldots \eta_n = \frac{L_{u_1}}{L_{m_1}} \cdot \frac{L_{u_2}}{L_{m_2}} \cdot \frac{L_{u_3}}{L_{m_3}} \ldots \frac{L_{u_n}}{L_{m_n}} = \eta \cdot \qquad (9.16)$$

Rezultă că *randamentul total al unui lanţ de maşini în serie este egal cu produsul randamentelor maşinilor lanţului.* Acest caz survine de multe ori în practică; un exemplu în acest sens îl constituie un agregat format dintr-un motor electric, un reductor şi o maşină pentru încercări de rezistenţă la întindere a firelor din industria textilă; randamentul total al unui asemenea agregat se obţine ca produsul randamentelor motorului, reductorului şi maşinii de încercat.

O b s e r v a ţ i e. Cifrele de mai sus reprezintă randamentele întregii maşini (nu numai randamentul mecanic).

7. Momente de inerţie

Să considerăm două roţi de aceeaşi greutate, dar care sînt construite în mod diferit: prima dintre ele este plină, iar cealaltă este goală în apropierea butucului, materialul din care este construită fiind repartizat mai mult la periferia roţii. Să punem aceste două roţi să se mişte în translaţie, trase de un fir cu aceeaşi forţă F pe un plan orizontal, perfect lucios. În baza legii a doua a dinamicii, cele două roţi vor căpăta aceeaşi acceleraţie:

$$a = \frac{F}{M} \qquad (9.17)$$

(M — masa roţilor), deoarece F şi M au aceeaşi valoare pentru ambele roţi.

Să montăm acum aceste două roţi pe cîte un ax şi să căutăm să le punem, în mişcare aplicînd fiecăreia cîte un cuplu $\mathfrak{M}$, avînd aceeaşi valoare. Deşi cele două roţi au aceeaşi masă şi li se aplică acelaşi cuplu, totuşi ele vor căpăta acceleraţii unghiulare diferite,

adică vor ajunge la aceeaşi viteză în timpuri diferite, şi anume cea plină va căpăta o accelerație mai mare, iar cea goală va căpăta o accelerație mai mică. Acest fapt se explică prin aceea că factorul care influențează mişcarea de translație a roților este masa M, pe cînd factorul care influențează mişcarea de rotație nu mai este masa roții, ci o altă mărime, care ține seama atît de masa corpului respectiv cît şi de repartiția ei în spațiu; această mărime se numeşte *moment de inerție*. La studiul mişcării de rotație a solidului rigid în jurul unei axe fixe vom vedea că accelerația unghiulară ε a solidului căruia i se aplică un cuplu Ж este dată de o relație asemănătoare formulei (9.17), şi anume:

$$\varepsilon = \frac{Ж}{J}, \tag{9.18}$$

în care locul masei M l-a luat momentul de inerție J al corpului respectiv. El apare în toate mărimile caracteristice ale dinamicii solidului aflat în mişcare de rotație, ca: energia sa cinetică, momentul cinetic etc.

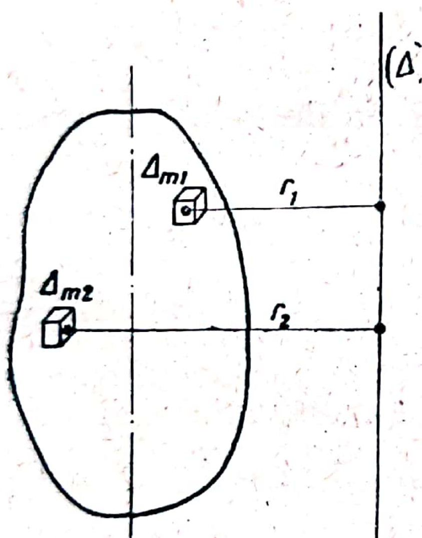


Fig. 9.5.

a) **Momentul de inerție al unui corp solid.** Pentru definirea momentului de inerție al unui corp în raport cu o axă, să considerăm un solid rigid şi o axă Δ care-l străbate sau nu. Dacă împărțim corpul nostru în porțiuni foarte mici avînd masa Δm_i (spre exemplu paralelipipede foarte mici) şi notăm prin r_i distanțele acestor porțiuni pînă la axa Δ, vom denumi drept moment de inerție al solidului față de axa Δ expresia (fig. 9.5):

$$J\Delta = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_n r_n^2, \tag{9.19}$$

n fiind numărul total de părți în care a fost împărțit solidul. Această expresie are valoarea cu atît mai exactă cu cît numărul de porțiuni în care a fost împărțit solidul este mai mare.

b) **Formula lui Steiner.** O relație importantă pentru aplicațiile practice este aceea care arată modul în care se calculează momentul de inerție al unui corp față de o axă care s-a deplasat paralel cu aceea în raport cu care o fost calculat inițial. Să

presupunem că am calculat momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă Δ_* trecînd prin centrul de greutate al corpului, prin aplicarea formulei (9.19). Să considerăm acum o altă axă Δ paralelă cu axa Δ_*, la distanța d, și să calculăm momentul de inerție față de noua axă. Aplicînd formula (9.19) în care distanțele r au devenit acum $r + d$, obținem (fig. 9.6):

$$J_\Delta = \Delta m_1 (r_1 + d)^2 + \Delta m_2 (r_2 + d)^2 + \ldots + \Delta m_n (r_n + d)^2 = \\ = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_n r_n^2 + d^2 (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \ldots + \\ + \Delta m_n) + 2d (\Delta m_1 r_1 + \Delta m_2 r_2 + \ldots + \Delta m_n r_n) \cdot \quad (9.20)$$

Termenii acestei sume au următoarele semnificații:

$\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_n r_n^2 = J\Delta_*$ reprezintă momentul de inerție față de axa Δ_*,

$d^2(\Delta m_1 + \Delta m_2 + \ldots + \Delta m_n) = d^2 M$; distanța d iese în factor, fiind aceeași pentru toate porțiunile $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots, \Delta m_n$, iar $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = M$, M fiind masa totală a corpului;

$2(d\Delta m_1 r_1 + \Delta m_2 r_2 + \ldots + \Delta m_n r_n) = 2d\ M\ r_G = 0$ (vezi formula) (2.26)

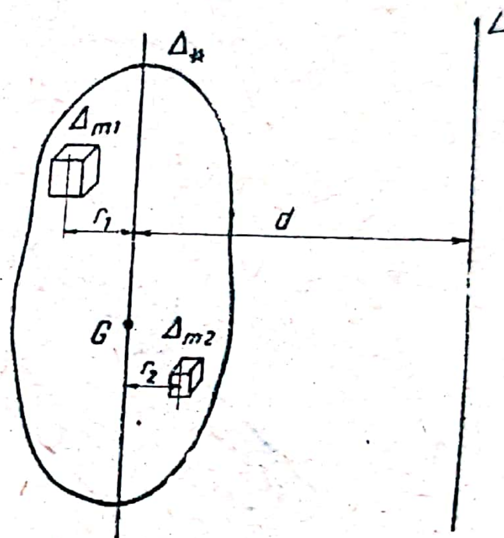


Fig. 9.6.

deoarece distanța centrului de greutate față de el însuși e nulă.

Înlocuind în (9.20) obținem:

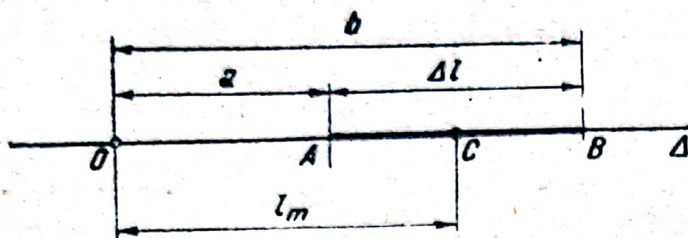
$$J\Delta = J\Delta_* + Md^2. \quad (9.21)$$

Din această relație rezultă că pentru a calcula momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă Δ paralelă cu axa Δ_* care trece prin centrul de greutate al corpului (față de care momentul de inerție al corpului este cunoscut) nu mai este nevoie să se aplice formula (9.20), ci el se obține adunînd la momentul de inerție $J\Delta_*$ cunoscut, produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre cele două axe.

c) **Calculul cîtorva momente de inerție.** În cele ce urmează vom calcula momentele de inerție ale cîtorva corpuri care apar mai des în aplicații.

Înainte de a efectua acest calcul, vom demonstra însă două relaţii de geometrie care ne vor fi de folos în cele ce vor urma.

Să considerăm o dreaptă oarecare Δ pe care se află un segment AB de lungime Δl şi un punct fix O. Depărtările extremităţilor A şi B ale segmentului precum şi a mijlocului său C faţă de punctul O le vom nota respectiv prin a, b şi l_m.



Avem (fig. 9.7, *a*):

$$l_m = a + \frac{\Delta l}{2},$$
$$l_m = b - \frac{\Delta l}{2}, \qquad (9.22)$$

de unde făcînd suma:

$$2l_m = b + a$$

şi ridicînd la pătrat

$$4l_m^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Fig. 9.7.

Să presupunem acum că segmentul AE este foarte mic; aceasta înseamnă că vom putea pune $ab \approx l_m^2$; înlocuind mai sus rezultă:

$$4l_m^2 = a^2 + b^2 + 2l_m^2 \qquad (9.23)$$

sau:

$$l_m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}. \qquad (9.24)$$

Din relaţia (9.23) mai deducem şi:

$$4l_m^2 - ab = a^2 + b^2 + ab.$$

Înlocuind în membrul întîi al acestei relaţii $ab \approx l_m^2$ mai obţinem şi:

$$l_m^2 = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3}. \qquad (9.25)$$

Relațiile (9.24) și (9.25) ne vor folosi în demonstrațiile care vor urma.

α) *Momentul de inerție al unei bare drepte omogene avînd secțiunea constantă.* Să considerăm bara dreaptă omogenă din figura 9.7,*b* avînd secțiunea de o formă oarecare (circulară, pătrată etc.) de arie A, constantă în lungul barei ; bara are lungimea l și masa specifică (masa unității de volum) constantă și egală cu ρ. Vom calcula momentul de inerție al barei în raport cu axa Δ care trece printr-una din extremitățile sale.

Pentru, aceasta, vom considera bara împărțită într-un număr foarte mare de porțiuni foarte înguste, prin plane perpendiculare pe axa sa. Să alegem o asemenea porțiune ; momentul său de inerție ΔI în raport cu axa Δ va fi conform formulei (9.19) (v. fig. 9.7,*b*):

$$\Delta I = \Delta m l_m^2 \qquad (9.26)$$

în care Δm este masa porțiunii de bară, iar l_m este depărtarea de axă a centrului porțiunii. Dar :
Δm = masa specifică × volumul porțiunii = $\rho A(l_2 - l_1)$, iar în baza formulei (9.25) :

$$l_m^2 = \frac{l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2}{3}.$$

Înlocuind acum în formula (9.26) și efectuînd calculele obținem :

$$\Delta I = \frac{\rho A}{3}(b^3 - a^3).$$

Cu ajutorul acestei formule putem alcătui momentele de inerție ale fiecărei porțiuni în care a fost împărțită bara, după cum se arată în tabela 9.1.

Tabela 9.1

Expresiile momentelor de inerție

Porțiunea	a	b	ΔI
I	0	1	$\frac{\rho A}{3} l_1^3$
II	1	2	$\frac{\rho A}{3}(l_2^3 - l_1^3)$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	l_n^3	l_{n-1}^3	$\frac{\rho A}{3}(l_n^3 - l_{n-1}^3)$

Pentru aflarea momentului de inerție total al barei în raport cu axa Δ va trebui să însumăm între ele momentele de inerție ale

părților sale componente (termenii ultimei coloane a tabelei). Observăm că în această sumă toți termenii din paranteze se reduc, cu excepția ultimului; obținem:

$$I = \frac{\rho A}{3} l_n^3 = \frac{\rho A l^3}{3}.$$

În această expresie, $V = Al$ reprezintă volumul întregii bare, iar $M = \rho A l = \rho V$ reprezintă masa întregii bare. Rezultă:

$$J_\Delta = \frac{Ml^2}{3}. \qquad (9.27)$$

β) *Momentul de inerție al unei coroane circulare foarte subțiri în raport cu axa de rotație care trece prin centrul coroanei.* Să considerăm o coroană de rază R. Dacă descompunem această coroană în porțiuni foarte mici, ca în figura 9.8,*a*, fiecare por-

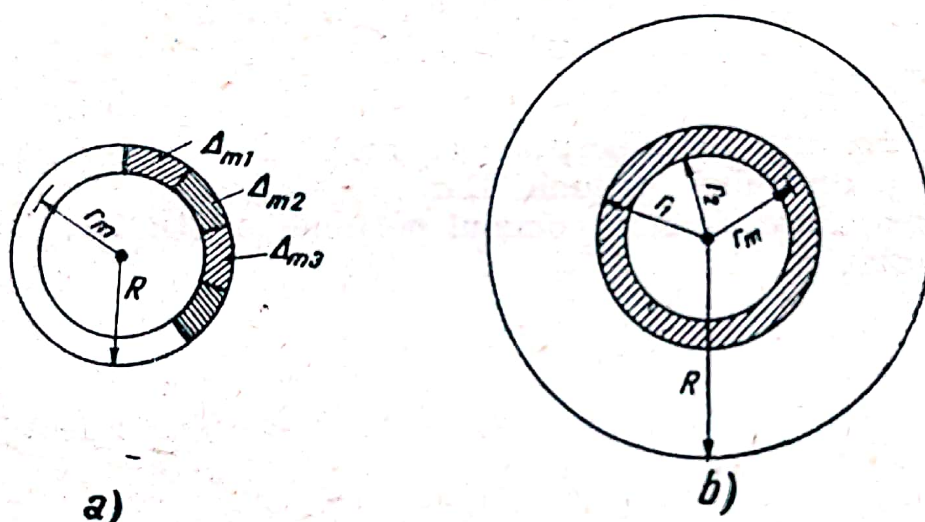


Fig. 9.8.

țiune avînd o masă Δm, și notăm cu r_m distanța de la mijlocul porțiunii pînă la axa Δ, adică pînă la centrul O al coroanei, momentele de inerție ale porțiunilor vor avea următoarele expresii:

$$\Delta I_1 = \Delta m_1 r_m^2, \quad \Delta I_2 = \Delta m_2 r_m^2, \; \ldots, \; \Delta I_n = \Delta m_n r_m^2;$$

ținînd seama că din cauza grosimii neglijabile a coroanei avem $r_m \approx R$ și însumînd momentele de inerție ale porțiunilor vom avea:

$$I = R^2(\Delta m_1 + \Delta m_2 + \ldots + \Delta m_n) = MR^2, \qquad (9.28)$$

unde am notat prin M masa totală a coroanei (suma maselor tuturor porțiunilor sale).

γ) *Momentul de inerție al unui disc subțire în raport cu axa care trece prin centrul său și este perpendiculară pe planul său* (fig. 9.8, *b*). Vom descompune discul în porțiuni de coroane circulare foarte subțiri; dacă notăm prin r_m raza medie a unei coroane și prin Δ_m masa sa, momentul de inerție al coroanei în raport cu axa perpendiculară pe planul discului are valoarea [v. formula (9.28)]:

$$\Delta I = \Delta m r_m^2. \tag{9.29}$$

Dacă notăm prin ρ masa specifică superficială (densitatea discului) vom avea:

$$\Delta m = \text{masa specifică} \times \text{suprafața coroanei} = \rho\pi(r_1^2 - r_2^2) \tag{9.30}$$

Dacă ținem seama că distanțele r_1 și r_2 diferă foarte puțin între ele, putem aplica formula (9.24) scriind:

$$r_m^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}. \tag{9.31}$$

Introducînd în (9.29) relațiile (9.30) și (9.31), obținem:

$$\Delta I = \pi\rho(r_1^2 - r_2^2)\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{\pi\rho}{2}(r_1^4 - r_2^4).$$

Cu ajutorul acestei formule putem calcula momentele de inerție ale tuturor coroanelor din care este alcătuit discul; astfel, pentru prima coroană de la periferia discului avem $r_1 = R$ și deci:

$$\Delta I = \frac{\pi\rho}{2}(R^4 - r_2^4).$$

Coroana imediat următoare are raza exterioară egală cu raza interioară r_2 a coroanei precedente, deci:

$$\Delta I_2 = \frac{\pi\rho}{2}(r_2^4 - r_3^4)$$

și așa mai departe se pot scrie momentele de inerție ale tuturor coroanelor din care se compune discul dat. Ultima coroană are raza interioară neglijabilă, așa că o vom lua egală cu zero. Momentul de inerție I al discului este egal cu suma momentelor de inerție ale coroanelor elementare.

$$I = \Delta I_1 + \Delta I_2 + \ldots + \Delta I_n =$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^4 - r_1^4 + r_2^4 - r_3^4 + \ldots + 0) = \frac{\pi\rho}{2}R^4. \tag{9.32}$$

Cum discul este omogen, putem defini densitatea superficială ca raportul dintre masa M şi suprafaţa întregului disc :

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Înlocuind în (9.32) obţinem final :

$$I = \frac{1}{2} MR^2. \tag{9.33}$$

δ) *Momentul de inerţie al unui cilindru plin în raport cu axa sa.* Considerînd cilindrul ca un ansamblu de discuri circulare subţiri înşirate pe axa sa, dacă notăm prin Δm masa unui asemenea disc şi prin ΔI momentul său de inerţie în raport cu axa care trece prin centrul său şi e perpendiculară pe disc, avem după formula (9.33) :

$$\Delta I = \frac{1}{2} \Delta m R^2$$

şi prin însumare

$$I = \frac{1}{2} R^2 (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \ldots + \Delta m_n) = \frac{1}{2} MR^2, \tag{9.34}$$

M fiind masa întregului cilindru.

Bara dreaptă şi discul circular sînt două corpuri care se întîlnesc foarte des în aplicaţii; momentele de inerţie pentru corpuri avînd alte forme, faţă de axe care trec prin centrul de greutate, se găsesc gata calculate în tabele.

8. Energie cinetică (energie de mişcare)

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material de masă m avînd viteza v; prin definiţie, vom denumi energia cinetică a punctului m mărimea :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \tag{9.35}$$

Această mărime constituie o măsură a capacităţii acestei mişcări de a produce lucrul mecanic, deci de a se transforma în orice fel de mişcare. Engels consideră cantitatea $\frac{mv^2}{2}$ ca mişcare mecanică măsurată prin capacitatea ei de a se transforma într-o „anumită cantitate de mişcare de altă formă". Energia cinetică este o mărime scalară, totdeauna pozitivă şi variabilă în general cu timpul.

b) **Solidul rigid și sistemul de solide rigide.** Prin definiție, vom denumi energie cinetică a unui solid rigid, pentru o poziție oarecare, suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor sale:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n v_n^2, \tag{9.36}$$

n fiind numărul punctelor solidului[1].

Energia cinetică a unui sistem de solide rigide este egală de asemenea cu suma energiilor cinetice ale corpurilor care compun sistemul.

Energia cinetecă a unui solid rigid are diferite expresii după mișcarea pe care o are solidul considerat; în cele ce urmează vom calcula aceste expresii pentru mișcările solidului rigid studiate în partea a III-a a acestei lucrări (*Cinematica*).

Solid rigid aflat în mișcare de translație. În mișcarea de translație, vitezele tuturor punctelor rigidului fiind aceleași, avem $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v$ și formula (9.36) devine:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n v^2 = \\ = \frac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = \frac{1}{2} M v^2, \tag{9.37}$$

unde s-a notat prin M suma maselor punctelor care alcătuiesc solidul, adică masa totală a solidului. $\left(M = \frac{G}{g}\right.$, G greutatea solidului, g accelerația gravitației.$\Big)$

Solid rigid aflat în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe. Într-o asemenea mișcare, vitezele punctelor solidului se exprimă prin formulele:

$$v_1 = \omega r_1, \quad v_2 = \omega r_2, \ldots, \quad v_n = \omega r_n, \tag{9.38}$$

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ reprezentînd distanțele punctelor la axa de rotație; înlocuind în formula (9.36), avem:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 (\omega r_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\omega r_2)^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n (\omega r_n)^2 = \\ = \frac{1}{2} \omega^2 \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2\right) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2, \tag{9.39}$$

în care s-a notat prin J_Δ momentul de inerție al întregului corp față de axa de rotație [v. formula (9.19)].

[1] În realitate, numărul n este infinit de mare.

Solid rigid aflat în mişcare plan-paralelă. După cum am văzut la cinematică, solidul rigid aflat în mişcare plan-paralelă are o distribuţie de viteze la un moment dat ca şi cum s-ar roti în jurul unei axe Δ (axa instantanee) variabilă atît faţă de sistemul de referinţă fix cît şi faţă de corp. Energia cinetică se calculează în acest caz după formula (9.39), în care atît momentul de inerţie J_Δ cît şi viteza unghiulară ω sînt variabile de la un moment la altul. Pentru a evita în anumite probleme calculul cu momente de inerţie variabile, expresia energiei cinetice a unui solid rigid aflat în mişcare plan-paralelă se pune sub o altă

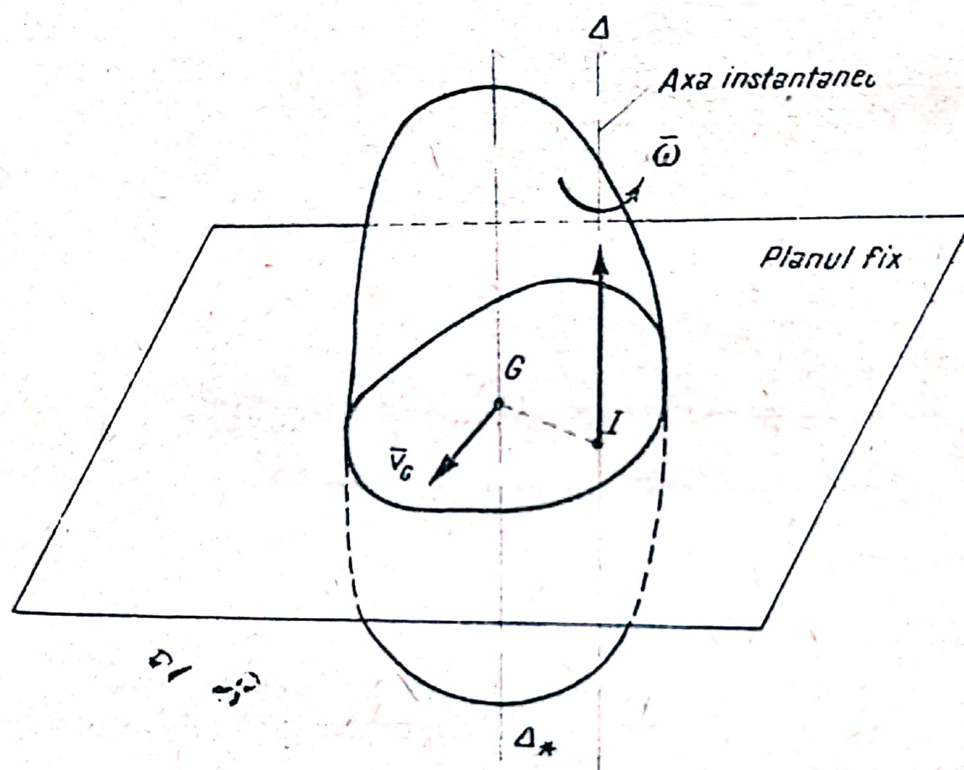


Fig. 9.9.

formă, exprimînd momentul de inerţie J_Δ în funcţie de momentul de inerţie al rigidului în raport cu axa Δ_* paralelă cu Δ, dar trecînd prin G (fig. 9.9); avem după formula (9.22):

$$J_\Delta = J_{\Delta *} + M \cdot IG^2,$$

M fiind masa totală a rigidului, I centrul instantaneu, G centrul de greutate al rigidului; dar viteza centrului de greutate se exprimă prin formula:

$$v_G = \omega \cdot IG.$$

Înlocuind în (9.29) obținem :

$$E_c = \frac{1}{2}(J_{\Delta *} + M\, I\, G^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 + M(I\, G \cdot \omega)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} J_{\Delta *}\, \omega^2 + M v_G^2. \qquad (9.40)$$

În această formulă, singurele elemente variabile cu timpul sînt vitezele ω și v_G.

Solid rigid aflat în mișcare elicoidală. Din cinematică se știe că mișcarea elicoidală este o mișcare compusă dintr-o translație cu viteza v_0, în lungul axei mișcării, și o rotație cu viteza unghiulară ω, în jurul acestei axe. Vitezele punctelor M_1, M_2, ..., M_n avînd masele m_1, m_2,..., m_n situate la distanțele r_1, r_2, ..., r_n de axa mișcării au două componente : una, de modul v_0, datorată translației orientată paralel cu axa mișcării și alta de module ωr_1, ωr_2,..., $r\omega_n$ orientate perpendicular pe această axă. Aceste două componente fiind perpendiculare între ele, modulele vitezelor rezultante ale punctelor M_1, M_2,...,M_n vor avea valorile :

$$v_1^2 = v_0^2 + \omega^2 r_1^2$$
$$v_2^2 = v_0^2 + \omega^2 r_2^2$$
$$\vdots$$
$$v_n^2 = v_0^2 + \omega^2 r_n^2$$

Introducînd aceste expresii ale vitezelor în formula generală (9.36) obținem :

$$E = \frac{1}{2} v_0^2\,(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + \frac{1}{2}\omega^2\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2) =$$
$$= \frac{1}{2} M \cdot IG^2 + \frac{1}{2} J_\Delta\, \omega^2, \qquad (9.41)$$

M fiind masa totală a corpului, iar J_Δ momentul său de inerție în raport cu axa mișcării.

Această expresie poate fi adusă la o formă similară celei date de (9.40), exprimînd momentul de inerție J_Δ în funcție de momentul de inerție al rigidului în raport cu axa Δ_* paralelă cu Δ dar trecînd prin G (fig. 9.10) ; avem, după formula (9.20) :

$$J_\Delta = J_{\Delta_*} + M \cdot OG^2,$$

M fiind masa totală a rigidului, G centrul său de greutate, O proiecţia centrului de greutate pe axa mişcării; înlocuind în (9.41) obţinem:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} (J_{\Delta_*} + M \cdot OG^2) \omega^2 = \frac{1}{2} M (v_0^2 + OG^2 \cdot \omega^2) + \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (9.42)$$

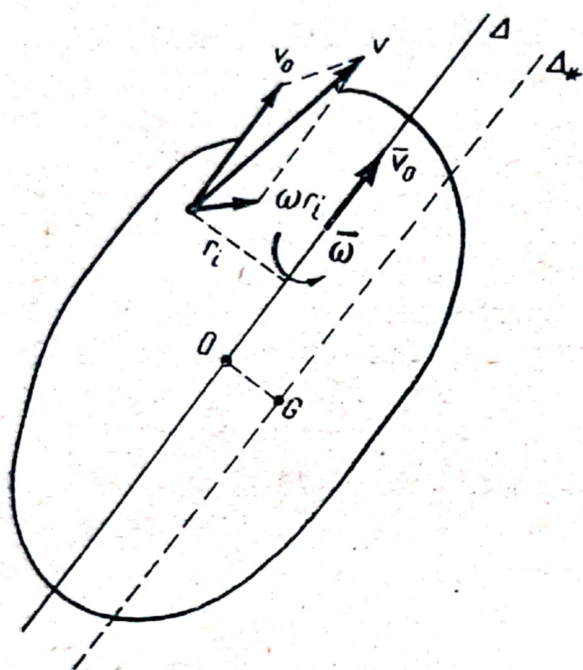


Fig. 9.10

Dar:

$$v_0^2 + OG^2\omega^2 = v_G^2$$

reprezintă modulul vitezei centrului de greutate G al rigidului; înlocuind în (9.42) obţinem:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (9.43)$$

adică o formulă similară celei dată de (9.40). Se poate arăta că această formulă este generală, adică cu ajutorul ei se exprimă energia cinetică la un moment dat pentru un corp rigid avînd orice fel de mişcare; după cum se poate verifica uşor, ea include drept cazuri particulare mişcările de translaţie şi de rotaţie ale rigidului. Ea este cunoscută sub denumirea de *teorema lui Koenig* şi se enunţă astfel: *energia cinetică a unui solid rigid se compune din energia cinetică a solidului dacă s-ar mişca în translaţie cu viteza centrului său de greutate, la care se adună energia sa cinetică de rotaţie cu viteza sa unghiulară* ω *în jurul unei axe* Δ_* *paralelă cu suportul vitezei unghiulare de rotaţie trecînd prin centrul de greutate.*

9. Energie potenţială (energie de poziţie)

Una dintre proprietăţile importante ale materiei este aceea de a putea înmagazina lucrul mecanic al forţelor care o acţionează, pe care apoi să-l înapoieze corpurilor materiale din jurul său, adică să producă un nou lucru mecanic.

Pentru a înţelege modul în care materia înmagazinează şi înapoiază apoi lucrul mecanic înmagazinat, vom examina cîteva cazuri simple.

Să considerăm un resort neîntins avînd lungimea sa naturală şi să-l întindem sau să-l comprimăm, iar apoi să-i fixăm extremităţile în această nouă poziţie. Cu toate că atît în primul cît şi în cel de-al doilea caz el se află în repaus, între aceste două situaţii există o deosebire : în timp ce în primul caz, arcul este neîntins, iar pentru a fi pus în mişcare are nevoie de o acţiune exterioară, în cel de-al doilea caz, dacă i se dă drumul, el se pune în mişcare fără nici o acţiune exterioară, putînd chiar produce lucru mecanic, concretizat în aceea că poate pune în mişcare un mecanism, poate ridica o greutate etc. Lucrul mecanic produs în cel de-al doilea caz nu reprezintă altceva decît restituirea lucrului mecanic înmagazinat de arc pentru aducerea lui din prima în cea de-a doua situaţie. Vom spune deci că arcul întins posedă o *energie potenţială* sau o *energie de poziţie* obţinută de el prin înmagazinarea lucrului mecanic al forţelor care l-au acţionat în timpul întinderii sale. Această energie, spre deosebire de energia înmagazinată de materia aflată în mişcare (*energia cinetică*), depinde numai de poziţia arcului, fapt pentru care a şi fost denumită energie potenţială.

Prin eliberarea arcului întins, el se pune în mişcare înapoind lucrul mecanic înmagazinat şi pierzînd în acelaşi timp posibilitatea de a mai produce datorită poziţiei sale lucru mecanic, pierzîndu-şi deci energia potenţială. Energia potenţială a arcului este variabilă deci cu poziţia sa : cu cît el este mai întins, el are o energie potenţială mai mare.

În acelaşi mod, un corp greu ridicat la o înălţime oarecare de la suprafaţa pămîntului înmagazinează o energie potenţială pe care şi-o păstrează atît timp cît rămîne în poziţia ridicată şi pe care poate s-o redea sub formă de lucru mecanic prin căderea sa, punînd, spre exemplu, în mişcare o maşină. Deoarece şi această energie este datorită numai poziţiei corpului, ea va fi denumită tot energie potenţială. Schimbîndu-şi poziţia, corpul se va pune în mişcare, înapoind lucrul mecanic înmagazinat şi pierzîndu-şi energia sa potenţială.

Alte cazuri de corpuri materiale care posedă energie potenţială sînt: gazele comprimate într-un recipient, un ciocan aflat în poziţie ridicată, apa dintr-un rezervor situat la înălţime ; în toate aceste cazuri, corpurile pot produce lucru mecanic numai datorită poziţiei lor.

Calculul energiei potenţiale se face astfel : se alege o poziţie în care energia potenţială este nulă şi se calculează lucrul me-

canic rezistent necesar aducerii sistemului material considerat din poziţia de energie potenţială nulă pînă în poziţia dorită; lucrul mecanic rezistent astfel calculat şi luat cu semn schimbat reprezintă energia potenţială căutată, deci:

$$E_p = -L \tag{9.44}$$

(E_p energia potenţială, L lucrul mecanic rezistent). Spre exemplu, lucrul mecanic rezistent necesar aducerii unei greutăţi G de la suprafaţa pămîntului la înălţimea h este:

$$L = -Gh, \tag{9.45}$$

iar energia potenţială înmagazinată de greutatea G este:

$$\mathbf{E_p = -L = Gh.} \tag{9.46}$$

10. Energie mecanică

Prin definiţie, vom înţelege prin energie mecanică a unui sistem material, la un moment dat, suma dintre energiile sale potenţială şi cinetică la momentul considerat:

$$E_m = E_p + E_c. \tag{9.47}$$

11. Impuls

O altă măsură a mişcării mecanice, măsură menită să indice capacitatea mişcării mecanice de a se transforma tot în mişcare mecanică, este *impulsul*, pe care-l vom defini în cele ce urmează.

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material M de masă m avînd viteza $\bar{v}$ tangentă la traiectoria sa (curbă C). Vom denumi prin definiţie impuls al punctului M vectorul (fig. 9.11)

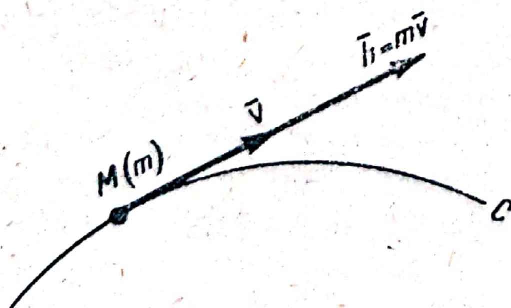


Fig. 9.11.

$$\bar{h} = m\bar{v}, \tag{9.48}$$

coliniar şi de acelaşi sens cu viteza $\overline{v}$ a punctului şi de m ori mai mare. Pe axele unui sistem de referinţă cartezian el are proiecţiile :

$$h_x = mv_x,$$
$$h_y = mv_y, \qquad (9.49)$$
$$h_z = mv_z.$$

Noţiunea de impuls a fost introdusă sub formă ştiinţifică de Leonardo da Vinci şi Galilei sub denumirea de „impetus". După Engels, impulsul (sau cantitatea de mişcare cum mai este denumit produsul $m\overline{v}$) este „mişcare mecanică măsurată prin mişcare mecanică".

b) **Solid rigid şi sistem de solide rigide.** Pentru un solid rigid, impulsul total $\overline{H}$ se obţine adunînd vectorial, după regula de la capitolul II, pct. b, impulsurile punctelor sale materiale :

$$\overline{H} = m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 + \ldots + m_n\overline{v}_n. \qquad (9.50)$$

În mod analog, pentru un sistem de solide rigide, impulsul total este suma vectorială a impulsurilor corpurilor componente. Pe axele unui sistem de referinţă cartezian, proiecţiile vectorului impuls $\overline{H}$ sînt :

$$H_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \ldots + m_nv_{nx},$$
$$H_y = m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + \ldots + m_nv_{ny}, \qquad (9.51)$$
$$H_z = m_1v_{1z} + m_2v_{2z} + \ldots + m_nv_{nz}.$$

Aceste expresii pot fi transformate în altele mai simple care să nu mai conţină sume ; într-adevăr să considerăm una dintre ele :

$$H_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \ldots + m_nv_{nx}.$$

Ea mai poate fi scrisă şi astfel :

$$H_x = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n.$$

Deoarece derivata sumei este egală cu suma derivatelor, iar mărimile m_1, $m_2,\ldots,m_n$ sînt nişte constante putem scrie :

$$H_x = (m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n).$$

Dar în baza formulelor (2.26) paranteza reprezintă coordonata ξ a centrului de greutate al sistemului, deci :

$$H = (Mx_G)' = M\dot{x}_G = Mv_{Gx},$$

M fiind masa totală a corpului, iar x_G abscisa centrului său de greutate. Formulele (9.51) se vor scrie deci :

$$H_x = Mv_{Gx},$$
$$H_y = Mv_{Gy}, \qquad (9.52)$$
$$H_z = Mv_{Gz}.$$

Sub această formă, ele pot fi folosite mult mai uşor în aplicaţii.

Aceste formule pot fi concentrate în următoarea formulă vectorială :

$$\overline{H} = M\overline{v}_G.$$

Comparînd între ele formulele (9.49) şi (9.52) putem spune că *impulsul unui corp este egal cu impulsul centrului său de greutate în care s-ar afla întreaga masă a corpului.*

12. Principiile mecanicii

Mecanica este una dintre ştiinţele naturii care a izvorît din nevoile vieţii zilnice, adică din nevoia omului de a construi unelte, case, drumuri etc. Ea s-a dezvoltat o dată cu dezvoltarea forţelor de producţie de-a lungul diferitelor orînduiri sociale.

Apărută din nevoile vieţii practice, mecanica este o ştiinţă experimentală, care s-a dezvoltat pe temeiul generalizării practicii. Consecinţa cea mai importantă a acestei generalizări o constituie elaborarea unor adevăruri fundamentale, asemănătoare postulatelor sau axiomelor din geometrie, denumite *principii.*

Vom înţelege prin principiu *un adevăr fundamental care nu poate fi demonstrat,* deoarece nu poate fi redus la altul mai simplu. Principiile pot fi verificate experimental indirect prin consecinţele lor.

Principiile mecanicii au fost enunţate într-o formă rămasă valabilă pînă în zilele noastre de către Isaac Newton.

Ele vor fi examinate în cele ce urmează.

a) **Principiul inerţiei.** Corpurile din natură se pot afla în două stări în raport cu un anumit sistem de referinţă : în stare de repaus, caracterizată prin aceea că mărimile geometrice care determină poziţia corpului respectiv în raport cu sistemul considerat nu variază cu timpul, sau în stare de mişcare, caracterizată prin aceea că aceste mărimi sînt funcţii de timp. Un caz particular de mişcare, important pentru cele ce vor urma, îl

constituie mişcarea rectilinie şi uniformă, în cazul punctului respectiv mişcarea de translaţie rectilinie şi uniformă, în cazul solidului rigid.

Să considerăm un corp aflat în mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă sau în repaus; după cele cunoscute din experienţă, deducem că el îşi va păstra starea de repaus sau cea de mişcare rectilinie şi uniformă atît timp cît din exterior nu se va exercita asupra sa vreo forţă. Această concluzie nu o putem verifica direct, deoarece în natură nu există nici un corp care să poată fi sustras complet acţiunii altor corpuri; de aceea, vom putea numai s-o deducem, observînd mişcările diferitelor corpuri din natură. Astfel, să aruncăm pe podea un corp prismatic cu o anumită viteză iniţială; acest corp va aluneca în mişcare de translaţie rectilinie cu o viteză din ce în ce mai mică pînă cînd, în cele din urmă, se va opri.

Să aruncăm acum acelaşi corp cu aceeaşi viteză iniţială pe o podea lustruită; vom constata că el se va mişcă în acelaşi mod ca şi în cazul anterior, cu deosebirea că scăderea vitezei sale va fi mai mică şi el se va opri mai departe decît în primul caz.

Aruncînd corpul pe suprafeţe din ce în ce mai lucii, constatăm că el va parcurge distanţe din ce în ce mai mari. Dacă generalizăm această experienţă, ajungem la următoarea concluzie: oprirea corpului nostru se datorează forţei de frecare ce ia naştere la contactul corpului cu suprafaţa pe care alunecă. Cu cît suprafaţa de alunecare este mai lucie, cu atît această forţă este mai mică şi cu atît efectul ei asupra corpului este mai mic şi distanţa parcursă pînă la oprire este mai mare; dacă ea nu ar exista, corpul s-ar mişca la infinit cu viteza pe care ar căpăta-o în primul moment, rectiliniu şi uniform.

Generalizînd acum rezultatele tuturor experienţelor de acest fel din natură, ajungem la primul principiu al mecanicii, denumit principiul inerţiei; el se enunţă astfel: *un punct material nu-şi schimbă starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atît timp cît nu intervine vreo forţă care să-i modifice această stare.*

O b s e r v a ţ i e. Din primul principiu al mecanicii rezultă că corpurile din natură îşi păstrează fie starea lor de repaus, fie starea lor de mişcare rectilinie şi uniformă, neputîndu-şi modifica prin ele însele, fără acţiunea altor corpuri, această stare; proprietatea aceasta a corpurilor se numeşte *inerţie.*

Proprietatea de inerţie a corpurilor o întîlnim mereu în practică; ea este uneori folosită de om în activitatea sa. Astfel, brutarul, după ce introduce în cuptor cu lopata aluatul pentru

pîine, trage repede lopata; aluatul își păstrează starea sa de repaus și rămîne în cuptor. Muncitorul care lucrează cu o sculă metalică prinsă într-o coadă de lemn (topor, ciocan) își înțepenește partea metalică în lemn izbind cu tărie partea de lemn de un perete fix; partea metalică păstrîndu-și starea de mișcare căpătată se înfige în lemn.

b) **Principiul acțiunii forțelor.** Să observăm ce acțiune exercită forțele asupra corpurilor cărora le sînt aplicate; dacă atîrnăm o greutate de tavan prin intermediul a două fire, ea rămîne în repaus; dacă asupra unui cărucior, care se află în repaus, aplicăm o forță, căruciorul trece din starea de repaus în cea de mișcare și apoi viteza sa crește din ce în ce; dacă dăm drumul unei bile pe podea, sub acțiunea forței de frecare viteza sa scade, pînă cînd bila se va opri.

Rezultă deci că forțele acționînd asupra corpurilor le produc accelerații; între aceste două mărimi, forțe și accelerații, trebuie să existe deci o anumită legătură. Această legătură a fost descoperită de către marele învățat Isaac Newton, care este unul dintre fondatorii mecanicii. Ea se enunță astfel: *dacă un punct material este acționat de o forță, F, el capătă, față de un sistem de referință fix, o mișcare a cărei accelerație este dirijată pe aceeași direcție și în același sens cu forța, și a cărei mărime este proporțională cu forța:*

$$a = \frac{F}{m},$$

m fiind masa punctului. Acest principiu poate fi verificat pe cale experimentală în modul următor: unui anumit corp i se aplică forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$,..., din ce în ce mai mari; măsurînd accelerațiile $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$,... căpătate de corp sub acțiunea forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$,..., vom observa că (fig. 9.12):

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \ldots = m \text{ (const)}.$$

Observații

— Principiul acțiunii forței exprimă faptul că $\overline{F}$ și $\overline{a}$ sînt doi vectori avînd același punct de aplicație, aceeași direcție și

același sens, în care vectorul $\overline{F}$ este de m ori mai mare decît cel al accelerației $\overline{a}$. Aceasta se scrie (fig. 9.13):

$$\overline{F}=\overline{ma}$$

— Principiul al doilea aplicat forței de gravitație (greutății corpurilor) se scrie:

$$\overline{G}=\overline{mg},$$

în care $\overline{G}$ este greutatea corpului respectiv, iar $\overline{g}$ este accelerația gravitației ($g = 9,81$ m/s²).

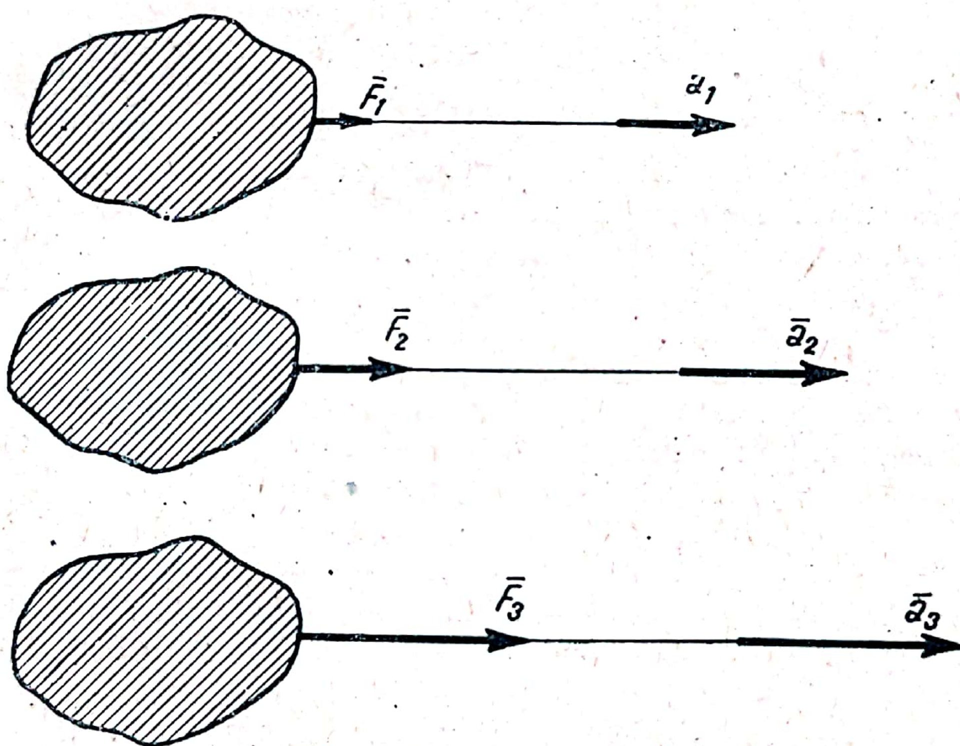


Fig. 9.12.

c) **Principiul acțiunii și reacțiunii.** S-a arătat că între diferitele corpuri din natură se exercită acțiuni reciproce sub forma de forțe sau cupluri de forțe. Să observăm cum se află între ele acțiunile reciproce a două corpuri.

Forța cu care punem în mișcare un corp reprezintă acțiunea corpului nostru asupra corpului pus în mișcare. În același timp, simțim o „rezistență" din partea corpului pe care vrem să-l punem în mișcare. Cînd tragem sau apăsăm un corp aflat în repaus, simțim de asemenea cum corpul respectiv acționează asupra noastră cu o forță dirijată în sens contrar celei cu care-l

acționăm noi. Aceasta se întîmplă nu numai atunci cînd cele două corpuri se află în contact direct, ci chiar și atunci cînd ele acționează unul asupra celuilalt fără să se afle în contact direct. Astfel, cînd ținem în mînă un magnet și-l apropiem de o bucată de oțel, observăm cum oțelul este atras de magnet. Această atracție reprezintă acțiunea magnetului asupra oțelului. La rîndul său, și oțelul acționează asupra magnetului; dacă vom ține în mînă oțelul și vom lăsa liber magnetul, vom observa cum acesta din urmă se va mișca spre bucata de oțel.

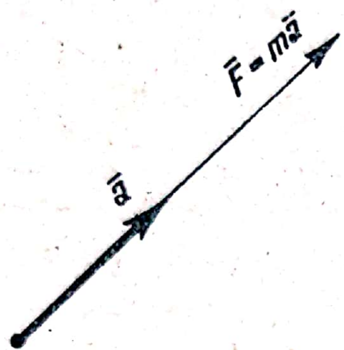


Fig. 9.13.

Generalizînd toate aceste fenomene precum și altele asemănătoare lor, vom putea afirma că întotdeauna cînd un corp acționează asupra altuia cu o forță, cel de-al doilea corp acționează și el asupra primului cu o forță de sens contrar. Prima dintre forțe o vom numi *acțiune*, iar pe cea de-a doua o vom numi *reacțiune*. Despre aceste două forțe, mecanica stabilește *principiul acțiunii și reacțiunii*, cel de-al treilea principiu al mecanicii. El se enunță astfel: *două puncte materiale acționează unul asupra celuilalt cu forțe egale și direct opuse.*

În baza acestui principiu, ajungem la ideea *dualității forțelor* din natură; într-adevăr, fiecare acțiune exercitată de un corp asupra altuia este însoțită întotdeauna de reacțiunea celui de-al doilea corp asupra primului, reacțiune care, în baza principiului enunțat, este egală și direct opusă acțiunii.

Principiul acțiunii și reacțiunii are largi aplicații în tehnică; astfel, motoarele cu reacție funcționează datorită forței de reacțiune exercitată de gazele care ies printr-un ajutaj asupra corpului motorului.

Observație. Este important de menționat faptul că *cele două forțe, acțiunea și reactiunea, nu se pot echilibra una cu cealaltă,* deoarece ele sînt aplicate unor corpuri diferite.

Într-adevăr, să ne închipuim că asupra unei bare așezată pe o masă aplicăm în extremitățile sale cu ajutorul mîinilor două forțe egale și direct opuse $\bar{F}$ (fig. 9.14). În baza principiului acțiunii și reacțiunii, bara va transmite în fiecare extremitate mîinilor noastre forțele $F' = F$, egale și direct opuse forțelor aplicate de mîinile noastre. Deși forțele F aplicate barei precum și forțele F' aplicate mîinilor noastre se echilibrează, totuși forțele F și F' nu-și fac singure echilibru. De acest fapt ne putem convinge ușor îndepărtînd una din mîini, spre exemplu mîna stîngă; deși au rămas numai forțele F și F' aplicate de mîna

noastră barei şi respectiv de bară mîinii noastre, şi deci aceste forţe sînt egale şi direct opuse ele constituind acţiunea şi reacţiunea, totuşi ele nu-şi fac echilibru; din practică ştim că în acest caz bara se pune în mişcare.

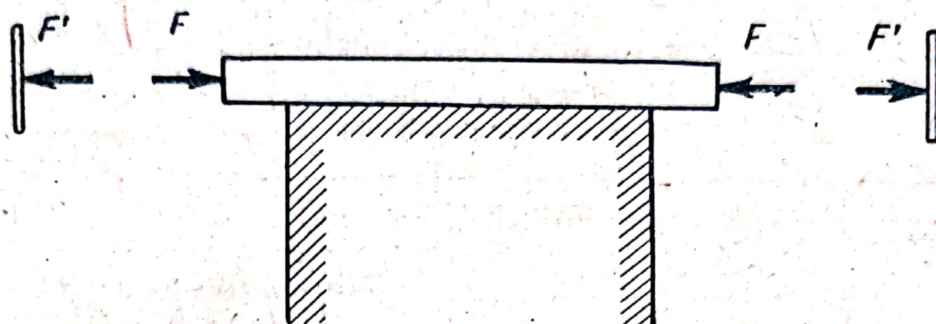


Fig. 9.14.

d) **Principiul paralelogramului.** Să considerăm un punct material supus acţiunii mai multor forţe; principiul paralelogramului se ocupă de mişcarea pe care o capătă un asemenea punct; el se enunţă astfel: *dacă asupra unui punct material acţionează simultan două forţe, mişcarea punctului este aceeaşi ca şi cînd asupra sa ar acţiona o singură forţă avînd mărimea, direcţia şi sensul diagonalei paralelogramului construit cu ajutorul celor două forţe.*

De la două forţe, el poate fi extins din aproape în aproape la mai multe forţe; într-adevăr, în acest caz se va compune rezultanta a două dintre forţe cu cea de-a treia forţa, apoi rezultanta acestor două forţe cu cea de-a patra forţă ş.a.m.d.

Principiul paralelogramului n-a fost prezentat de Newton ca un principiu de sine stătător, ci ca o anexă a principiului al doilea. El are însă un conţinut fizic de sine stătător, deoarece în baza lui putem aduna vectorii forţe după aceeaşi regulă după care adunăm, toţi vectorii, adică după regula paralelogramului.

13. Forţe de inerţie

a) **Punctul material.** Să presupunem că deplasăm prin intermediul unui fir o greutate (punct material) pe un plan orizontal (fig. 9.15); aplicînd firului o forţă $\overline{F}$, aceasta se trans-

mite greutății, care începe să se deplaseze cu accelerația $\overline{a}$. În baza principiului al doilea al mecanicii vom avea:

$$\overline{F} = m\overline{a},$$

în care m reprezintă masa punctului considerat. Dar o dată cu forța $\overline{F}$ va apărea — în baza principiului acțiunii și reacțiunii — o altă forță $\overline{F}_i = -\overline{F} = -m\overline{a}$, egală și direct opusă forței $\overline{F}$. Această nouă forță este aplicată întotdeauna agentului care produce mișcarea corpului considerat, adică, în cazul de față, a celui care pune în mișcare greutatea.

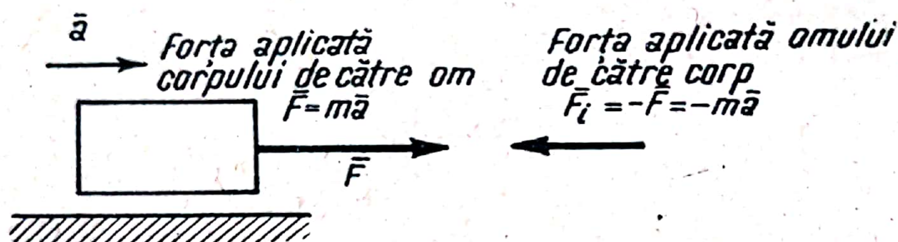


Fig. 9.15.

Această forță, denumită *forță de inerție*, constituie deci reacțiunea corpului considerat asupra corpurilor care-l acționează punîndu-l în mișcare. Ea are expresia:

$$\overline{F}_i = -m\overline{a}.$$

Proiecțiile forței de inerție pe axele unui triedru cartezian $\overline{F}_i$ sînt:

$$\begin{aligned} F_{ix} &= -ma_x, \\ F_{iy} &= -ma_y, \\ F_{iz} &= -ma_z. \end{aligned} \tag{9.53}$$

Dacă se consideră accelerația punctului descompusă în componenta sa normală și tangențială, forța de inerție are componentele:

$$\begin{aligned} F_{it} &= -ma_t, \\ F_{in} &= -ma_n, \end{aligned} \tag{9.54}$$

denumite respectiv *forța de inerție tangențială* și *forța de inerție normală* sau *forța centrifugă*.

Forțele de inerție joacă un rol important la studiul mișcării sistemelor materiale.

b) **Solidul rigid şi sistem de solide rigide.** Rezultanta forţelor de inerţie a unui solid rigid se obţine adunînd vectorial forţele de inerţie ale punctelor sale componente :

$$\bar{R}_i = \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \ldots + \bar{F}_{in} = -M\bar{a}_G.$$

Se poate arăta că rezultanta forţelor de inerţie ale unui solid rigid este egală cu masa totală a corpului înmulţită cu acceleraţia centrului său de greutate luată cu semn schimbat.

Rezultatul obţinut este analog celui din cazul punctului material, cu deosebirea că în loc de acceleraţia punctului apare acceleraţia centrului de greutate al corpului.

Proiecţiile rezultantei forţelor de inerţie pe axele unui triedru cartezian sînt :

$$R_{ix} = -Ma_{Gx}, \quad R_{iy} = -Ma_{Gy}, \quad R_{iz} = -Ma_{Gz}. \tag{9.55}$$

Dacă se consideră acceleraţia centrului de greutate descompusă în componentele sale normală şi tangenţială, rezultanta forţelor de inerţie are componentele :

$$R_{it} = -ma_{Gt}, \quad R_{in} = -ma_{Gn}. \tag{9.56}$$

14. Momentul forţelor de inerţie

Punctul material. Să considerăm un punct material M de masă m, avînd acceleraţia a. După cum am văzut, forţa sa de inerţie este :

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}.$$

Să considerăm un punct fix O şi să luăm momentul acestei forţe în raport cu punctul O. El poartă denumirea de *moment al forţei de inerţie* $\bar{F}_i$ şi joacă un rol important în studiul mişcării solidului rigid.

Mărimea acestui moment este, ca în cazul unei forţe oarecare :

$$M_{iO} = F_i d = mad, \tag{9.57}$$

d fiind distanţa de la punctul O la suportul forţei de inerţie, F_i.

E x e m p l u. *Calculul momentului forțelor de inerție ale unui solid rigid cu axă fixă în raport cu axa de rotație* (fig. 9.16). Pentru aceasta, vom împărți corpul dat într-un număr n de părți, avînd respectiv masele Δm_1 Δm_2, ..., Δm_n. Forțele de inerție ale acestor părți au următoarele expresii:

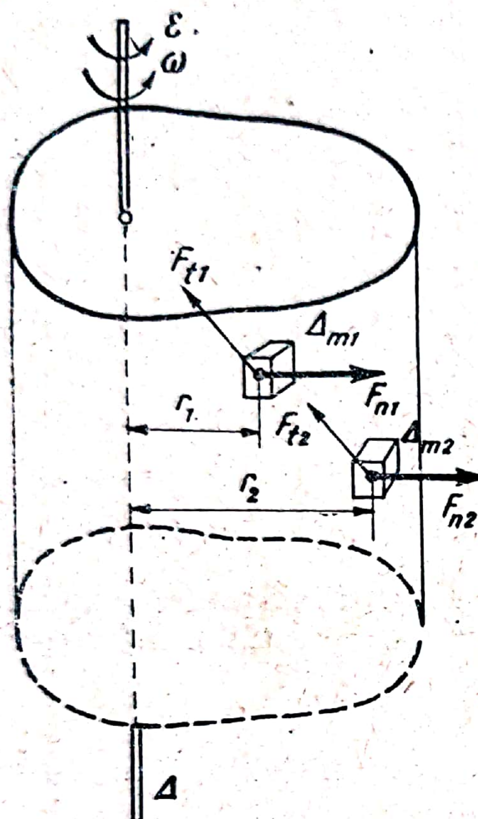


Fig. 9.6.

— forțele de inerție normale:

$$F_{n1} = \Delta m_1 r_1 \omega^2,$$
$$F_{n2} = \Delta m_2 r_2 \omega^2,$$
$$\vdots$$
$$F_{nn} = \Delta m_n r_n \omega^2;$$

— forțele de inerție tangențiale:

$$F_{t1} = \Delta m_1 r_1 \varepsilon,$$
$$F_{t2} = \Delta m_2 r_2 \varepsilon,$$
$$\vdots$$
$$F_{tn} = \Delta m_n r_n \varepsilon.$$

Din figura 9.16 se observă forțele de inerție normale nu dau moment în raport cu axe de rotație, deoarece intersectează această axă. Forțele de inerție tangențiale fiind însă perpendiculare pe axa de rotație dau momentele:

$$M_1 = F_{t1} \cdot r_1 = \Delta m_1 r_1^2 \varepsilon,$$
$$M_2 = F_{t2} \cdot r_2 = \Delta m_2 r_2^2 \varepsilon,$$
$$\vdots$$
$$M_n = F_{tn} \cdot r_n = \Delta m_n r_n^2 \varepsilon.$$

Momentul total al forțelor de inerție este:

$$M_i = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \varepsilon(\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_n r_n^2).$$

Expresia din paranteză reprezintă momentul de inerție total I al corpului în raport cu axa Δ; obținem deci:

$$M_i = I_\Delta \varepsilon. \tag{9.58}$$

15. Aplicații

a) Să se calculeze puterea pierdută prin frecare într-un lagăr de capăt pentru un arbore vertical. Se vor studia şi compara rezultatele pentru cazul frecării pe fus sau cu bile (fig. 9.17).

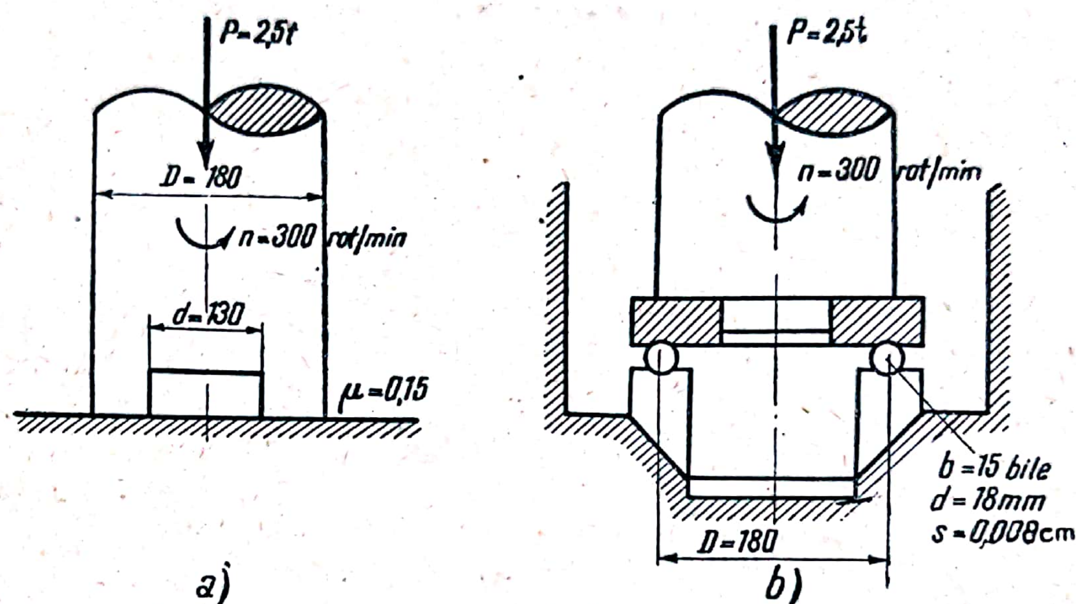


Fig. 9.17.

R e z o l v a r e

Vom calcula puterea pierdută prin frecare cu ajutorul formulei (9.11):

$$P_f = M_f \omega,$$

în care M_f este momentul rezultant al cuplului forțelor de frecare, de pivotare, iar ω viteza unghiulară de rotaţie a acestui cuplu.

Pentru cazul din figura 9.17, *a*, expresia momentului rezultant al forțelor de frecare este dată de formula (3.7):

$$M_f = \frac{2}{3}\mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Înlocuind valorile numerice obținem (forțele în kgf, distanțele în *m*, timpul în *s*):

$$P_f = \frac{2}{3} \times 0{,}15 \times 2\,500 \times \frac{0{,}09^3 - 0{,}065^3}{0{,}09^2 - 0{,}065^2} \times \frac{3{,}14 \times 300}{30} =$$

$$= 921 \text{ kgfm/s} \approx 12\text{CP}.$$

În cazul din figura 9.17, b, vom aplica aceeaşi formulă pentru calculul puterii pierdute prin frecare, în care M_f este momentul rezultant al cuplului forţelor de frecare de rostogolire a bilelor rulmentului, iar ω viteza unghiulară de rotaţie a rulmentului.

Forţa care revine fiecărei bile a rumentului este:

$$N = \frac{P}{b},$$

b fiind numărul de bile (se neglijează greutatea bilei). Momentul cuplului forţelor de frecare de rostogolire este (fig. 9.18, a):

$$M_f = N \cdot 2s = 2\frac{P}{b}s.$$

Viteza unghiulară ω a bilei rulmentului se obţine împărţind viteza punctului de contact A al bilei cu inelul mobil (egală cu

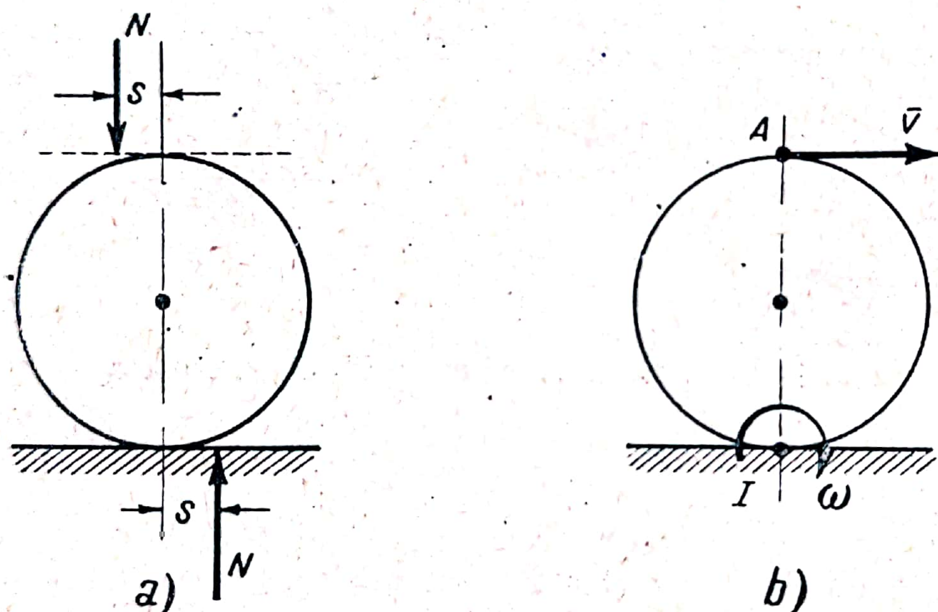


Fig. 9.18.

viteza arborelui în acest punct) la distanţa pînă la centrul instantaneu I, deoarece bila are o mişcare plan-paralelă; avem deci (fig. 9.18, b):

$$\omega = \frac{v}{2r},$$

r fiind raza bilei. Viteza v se calculează în funcţie de turaţia n a arborelui cu formula:

$$v = \frac{\pi D n}{60}.$$

Înlocuind în formulă, obținem :

$$M_f = 2\frac{P}{b}\, s\, \frac{\pi\, Dn}{2\times 60r} = \frac{\pi DnPs}{60\, br},$$

care, cu valorile numerice în aceleași unități ca mai sus, conduce la :

$$M_f = \frac{3{,}14\times 0{,}18\times 300\times 2\,500\times 0{,}000\,08}{60\times 15\times 0{,}009} = 0{,}42\ \frac{\text{kgfm}}{s} = \frac{0{,}42}{75}\ \text{CP} =$$

$$= 0{,}0056\ \text{CP}.$$

b) Se cere să se calculeze pentru discul circular omogen de greutate G și rază R, care se rotește cu viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε (fig. 9.19), mărimile dinamice caracteristice.

R e z o l v a r e

Discul are masa M și momentul de inerție în raport cu axa de rotație (formula 9.25) date de relațiile :

$$M = \frac{G}{g}, \quad J_\Delta = \frac{G}{g}\,\frac{R^2}{2}.$$

Centrul de greutate al discului fiind fix are atît viteza cît și accelerația nule :

$$v_G = a_G = 0.$$

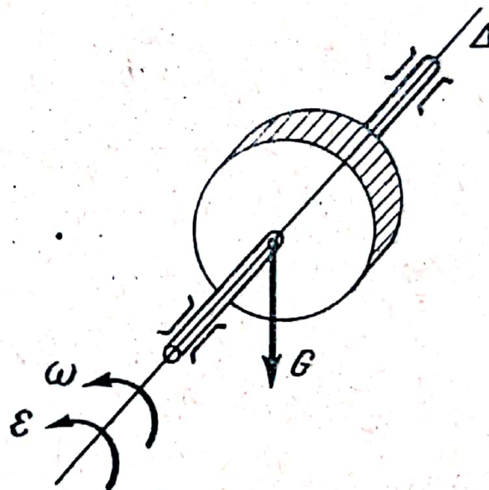


Fig. 9.19.

Cu aceasta, mărimile sale dinamice sînt :

— energia cinetică : $E = \frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,\frac{R^2}{2}\,\omega^2$ (formula 9.39) ;

— impulsul : $H = \frac{G}{g}\cdot 0 = 0$ (formulele 9.52) ;

— rezultanta forțelor de inerție : $F_i = -\frac{G}{g}\cdot 0 = 0$ (formulele 9.55) ;

— momentul rezultant al forțelor de inerție

în raport cu axa Δ $M_{i\Delta} = -\frac{G}{g}\,\frac{R^2}{2}\,\varepsilon$ (formula 9.58).

Capitolul X

METODE GENERALE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE DINAMICĂ

1. Mărimile care intervin în studiul mişcării unui sistem material

După cum am mai arătat în introducere, dinamica se ocupă cu studiul mişcării corpurilor ţinînd seama de forţele care le acţionează. Pe lîngă mărimile care caracterizează vectorii forţă aplicaţi sistemului material considerat, într-o problemă de mecanică intervin şi o serie de caracteristici ale mişcării corpului respectiv (viteze, acceleraţii), precum şi o serie de caracteristici mecanice ale corpului (masă, moment de inerţie). După cum o parte din mărimile arătate sînt cunoscute iar altele necunoscute, problema respectivă se încadrează într-unul din cele trei tipuri arătate în introducere: probleme directe, inverse sau mixte.

În cele ce urmează vom analiza în detaliu mărimile care intervin într-o problemă de dinamică. Acestea sînt:

— *mărimi ce caracterizează forţele aplicate sistemului material:* module ale forţelor, unghiuri ale suporturilor forţelor, distanţe şi unghiuri care caracterizează poziţia punctelor lor de aplicaţie. Aceste mărimi sînt cunoscute pentru forţele date şi parţial necunoscute pentru reacţiuni. Într-adevăr, pentru reacţiunea dintr-un reazem, modulul este necunoscut, iar pentru reacţiunea dintr-o articulaţie sînt necunoscute atît modulul cît şi orientarea. Aceste mărimi pot fi constante sau variabile în timpul mişcării;

— *mărimi ce caracterizează mişcarea sistemului material;* distanţe şi unghiuri variabile în timp, viteze liniare şi unghiulare, acceleraţii liniare şi unghiulare. Valorile particulare ale acestor mărimi pentru momentul în care începe mişcarea sistemului material considerat sînt denumite *condiţii iniţiale*. Mărimile care caracterizează mişcarea unui sistem material sînt parţial cunoscute, deoarece de cele mai multe ori corpurile de a căror mişcare ne ocupăm se află în contact cu alte corpuri înconjurătoare, fapt care impune anumite restricţii mişcării lor;

— *mărimi geometrice și mecanice care caracterizează sistemul material.* Acestea sînt: distanțe sau unghiuri, care caracterizează forma geometrică a corpului considerat, masa corpului, momentul său de inerție. În general, aceste mărimi sînt cunoscute, afară de cazuri speciale cînd se cere valoarea uneia dintre ele pentru ca sistemul material considerat să aibă o mișcare dată.

Acestea sînt mărimile care intervin în studiul mișcării unui sistem material față de un sistem de referință fix.

Într-o problemă de dinamică, mărimile arătate mai sus se împart în două mari categorii: *date* și *necunoscute*. În principiu, oricare dintre mărimile de mai sus poate juca într-o problemă de dinamică atît rolul de dată cît și rolul de necunoscută; totuși în problemele practice curente, care sînt de tipul mixt, există o anumită împărțire a acestor mărimi între date și necunoscute, care se păstrează în general aceeași, cu foarte mici excepții.

Trebuie remarcat cu această ocazie faptul că există anumite probleme de dinamică în care nu se cer valorile tuturor necunoscutelor din problema respectivă; astfel, există probleme de dinamică în care se cere numai mișcarea sistemului material considerat, fără a se cere și valorile reacțiunilor. În asemenea cazuri va trebui să alegem dintre metodele care vor fi expuse în acest capitol numai pe acelea care conduc cel mai repede la rezultat, fără a complica în mod inutil problema respectivă.

În general, din punctul de vedere al datelor și al necunoscutelor, o problemă de dinamică se prezintă sub următorul aspect (cazul studiului mișcării unui corp față de un sistem de referință fix):

Date:

— mărimi ce caracterizează forțele date aplicate sistemului material: module ale forțelor, distanțe, unghiuri;

— mărimi geometrice și mecanice ce caracterizează sistemul material: distanțe, unghiuri, mase, momente de inerție;

— mărimi geometrice și cinematice ce caracterizează mișcarea sistemului în momentul începerii sale (condiții inițiale): distanțe, unghiuri, viteze liniare și unghiulare (valorile lor constante din momentul inițial).

Necunoscute:

— mărimi ce caracterizează mișcarea sistemului material la un moment dat: distanțe, unghiuri, viteze liniare, vi-

teze unghiulare, accelerații liniare, accelerații unghiulare (valorile lor variabile din timpul mișcării) ;

— mărimi ce caracterizează forțele necunoscute aplicate sistemului material (distanțe, unghiuri, module) ; aci intră în general reacțiunile în cazul sistemelor cu legături.

Tabela 10.1

Datele și necunoscutele unei probleme de dinamică

Date	Forțe Mărimi geometrice și mecanice	
	Condiții inițiale	
Necunoscute	Mișcare	
	Reacțiuni	

Cele expuse pînă aci le vom concretiza la începutul fiecărei probleme prin alcătuirea unei tabele prescurtate (tabela 10.1).

2. Teorema energiei cinetice

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material M de masă m acționat de o forță F, rezultanta tuturor forțelor care se exercită asupra lui (fig. 10.1); sub acțiunea forței $\bar{F}$, punctul M parcurge pe traiectoria lui c, într-un timp Δt, o porțiune $\Delta s = MM'$. În acest timp, forța $\bar{F}$ efectuează un lucru mecanic :

$$\Delta L = F\,\Delta s\,\cos\alpha. \qquad (10.1)$$

Ținînd seama de ecuația fundamentală a dinamicii (principiul al doilea) :

$$F = ma,$$

lucrul mecanic efectuat de forța F se mai scrie :

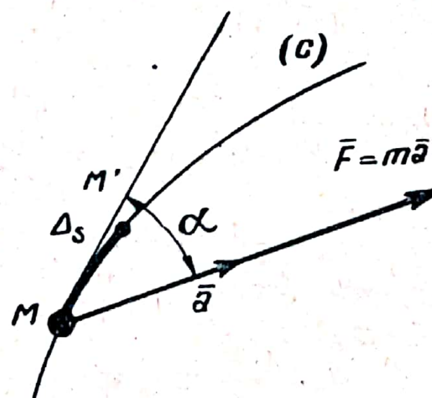


Fig. 10.1.

$$\Delta L = ma\,\Delta s\,\cos\alpha = m\,\Delta s a\,\cos\alpha.$$

Dar mărimea $a\cos\alpha$ reprezintă proiecția vectorului $\bar{a}$ pe coarda MM_1, care la limită devine tangentă la traiectorie în M ; ea arată cum variază mărimea vitezei v :

$$a\cos\alpha = a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Din formula (6.16), elementul de arc ds mai poate fi scris şi sub forma :

$$\Delta s = v\Delta t.$$

Înlocuind în (10.1) obţinem :

$$\Delta L = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot v\,\Delta t = mv\,\Delta v. \qquad (10.2)$$

Să calculăm acum care este variaţia energiei punctului cînd viteza sa creşte de la valoarea v din momentul t la valoarea $v + \Delta v$ din momentul $t + \Delta t$; vom avea:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m\,(v+\Delta v)^2 - \frac{1}{2}\,mv^2 = mv\,\Delta v + \frac{1}{2}\,m\,(\Delta v)^2.$$

Dacă intervalul de timp Δt este destul de mic, termenul al doilea din expresia lui ΔE_c este şi el destul de mic şi poate fi neglijat, aşa încît vom avea :

$$\Delta E_c = mv\,\Delta v.$$

Comparînd acest rezultat cu cel dat de formula (10.2) obţinem :

$$\Delta L = \Delta E_c. \qquad (10.3)$$

Dacă timpul Δt este un infinit mic ($\Delta t = dt$), formula (10.3) se mai scrie :

$$dL = dE_c.$$

Această expresie reprezintă *teorema variaţiei energiei cienetice*; ea se enunţă astfel : *variaţia energiei cinetice a unui punct material în intervalul de timp Δt este egală cu lucrul mecanic efectuat în acelaşi interval de timp de către rezultanta forţelor care acţionează punctul.*

Dacă intervalul de timp este finit, variaţia energiei cinetice se calculează efectuînd diferenţa valorilor energiei cinetice din poziţia finală şi poziţia iniţială, iar lucrul mecanic se calculează după una dintre formulele (9.3), (9.4). Teorema energiei cinetice se scrie în acest caz :

$$\frac{1}{2}\,mv_B^2 - \frac{1}{2}\,mv_A^2 = L_{A-B}, \qquad (10.4)$$

unde s-a notat prin A şi B cele două poziţii (iniţială şi finală) ale punctului.

b) **Solidul rigid și sistemul de solide rigide.** Să considerăm acum un sistem material oarecare (solid rigid, sistem de solide rigide) aflat în mișcare, supus la acțiunea a diferite forțe exterioare date și de legătură precum și la acțiunea a diferite forțe interioare, aflat în două poziții A și B, și anume : în poziția A la un timp t_A, iar în poziția B la un timp $t_P (t_B > t_A)$. Pentru fiecare punct material care alcătuiește sistemul considerat se poate scrie o relație de forma (10.4) :

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 = L_{1\,A-B},$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2 = L_{2\,A-B},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2} m_n v_{nB}^2 - \frac{1}{2} m_n v_{nA}^2 = L_{n\,A-B}.$$

Dacă adunăm toate aceste relații obținem :

$$\left(\frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n v_{nB}^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n v_{nA}^2\right) = L_{1\,A-B} + L_{2\,A-B} + \ldots + L_{n\,A-B}$$

sau prescurtat :

$$\Sigma \frac{1}{2} m v_B^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_A^2 = L_{A-B}. \tag{10.5}$$

Dar $\Sigma \frac{1}{2} m v_B^2 = E_B$ reprezintă energia cinetică totală a sistemului în poziția B, $\Sigma \frac{1}{2} m v_A^2 = E_A$ reprezintă energia cinetică a sistemului în poziția A, iar L_{A-B} reprezintă suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor exterioare (forțe date și forțe de legătură) precum și ale forțelor interioare efectuate între cele două poziții A și B.

Relația (10.5) se scrie deci :

$$E_B - E_A = L_{AB} \tag{10.6}$$

și se exprimă astfel : *variația energiei cinetice a unui sistem material între două poziții (configurații) ale acestui sistem este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forțele exterioare și interioare care acționează sistemul între aceleași două poziții.*

În cazul solidului rigid, forțele interioare nu dau lucru mecanic, iar energia totală a unui sistem de corpuri rigide aflat în mișcare se calculează însumînd energiile cinetice ale corpurilor care alcătuiesc sistemul.

c) **Indicații metodice privind aplicarea teoremei energiei cinetice.** Aplicarea teoremei energiei cinetice la rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor materiale se face urmărind în general o anumită ordine, și anume :

— se stabilesc cele două poziții A și B ale sistemului ;

— se stabilesc mișcările tuturor corpurilor sistemului precum și distribuțiile de viteze în cele două poziții A și B ; în general, trebuie exprimate vitezele tuturor corpurilor ca funcții de una sau mai multe viteze alese drept necunoscute ;

— se alege expresia energiei cinetice corespunzătoare mișcării fiecărui corp în parte și se particularizează pentru cele două poziții A și B ; însumînd rezultatele, se obțin mărimile E_A și E_B ;

— se figurează toate forțele exterioare și se calculează deplasările punctelor de aplicație ale forțelor ; se calculează apoi lucrul mecanic al fiecărei forțe pe drumul parcurs din poziția A pînă în poziția B ; însumînd rezultatele se obține lucrul mecanic total L_{A-B} ;

— se introduc mărimile E_A, E_B și L_{A-B} în formula (10.6) și se rezolvă ecuația astfel obținută.

Rezolvarea problemelor se poate face folosind tabela 10.2

Tabela 10.2

Tabelă pentru rezolvarea problemelor cu teorema energiei cinetice

Corpul	Distribuția de viteze	Energia cinetică		Forțe exterioare	Deplasările punctelor de aplicație	Lucrul mecanic L_{A-B}
		în poziția A	în poziția B			
1 2				F_1 F_2		

E x e m p l u. Se cere să se studieze mişcarea sistemului din figura 10.2 care pleacă din repaus, neglijînd frecările.

Sistemul se compune din trei corpuri rigide : un scripete şi două greutăţi ; a determina mişcarea sistemului înseamnă a determina mişcarea fiecărui corp care intră în alcătuirea sa.

Sistemul are un singur grad de libertate ; aceasta înseamnă că un singur parametru geometric sau o singură viteză caracterizează mişcarea întregului sistem, restul vitezelor exprimîndu-se în funcţie de cea aleasă ca necunoscută.

Datele şi necunoscutele sînt arătate în tabela 10.3.

Tabela 10.3

Datele şi necunoscutele problemei

Date	Forţe	P, Q, G
	Mărimi geometrice şi mecanice	J, R, r
	Condiţii iniţiale	la $t = 0$ { toate vitezele, distanţele şi unghiurile sînt nule
Necunoscute	Mişcare	viteza $\overline{v}$, acceleraţia $\overline{a}$ sau deplasarea h a greutăţii P
	Reacţiuni	T_1, T_2, X, Y (tensiunile din fire şi reacţiunile din axa scripetelui)

Pentru rezolvare, vom urmări ordinea indicată mai sus :

— Cele două poziţii ale sistemului sînt : poziţia de repaus din care pleacă (A), desenată continuu pe figura 10.2, şi o altă poziţie în timpul mişcării (B), desenată punctat pe aceeaşi figură. În poziţia A, greutăţile P şi Q se află desenate plin ; poziţia scripetelui este marcată printr-o rază desenată de asemenea plin. Poziţia B este o poziţie oarecare de timpul mişcării ; în această poziţie greutatea P s-a deplasat faţă de poziţia A cu distanţa h, scripetele s-a rotit faţă de poziţia A cu unghiul θ iar greutatea Q s-a deplasat faţă de poziţia A cu distanţa h_1.

— Cele trei corpuri au următoarele mişcări :

— greutatea P are o mişcare de translaţie rectilinie pe verticală cu viteza v ; $v_A = 0$, $v_B = v$;

— scripetele are o mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe trecînd prin O şi perpendiculară pe planul său, cu viteza unghiulară ω;

$$\omega_A = 0, \ \omega_B = \omega;$$

— greutatea Q are o mişcare de translaţie rectilinie pe varticală cu viteza v_1; $v_{1A} = 0$, $v_{1B} = v_1$.

Deoarece sistemul are un singur grad de libertate, vitezele tuturor punctelor sistemului se exprimă ca funcţie numai de o singură viteză, aleasă drept necunoscută; alegînd drept necunoscută viteza v şi exprimînd faptul că vitezele celor două fire care susţin greutăţile sînt egale cu cele ale punctelor de pe scripete, obţinem:

$$v = R\omega; \quad v_1 = r\omega,$$

de unde:

$$\omega = \frac{v}{R}, \qquad v_1 = \frac{r}{R}v. \tag{10.7}$$

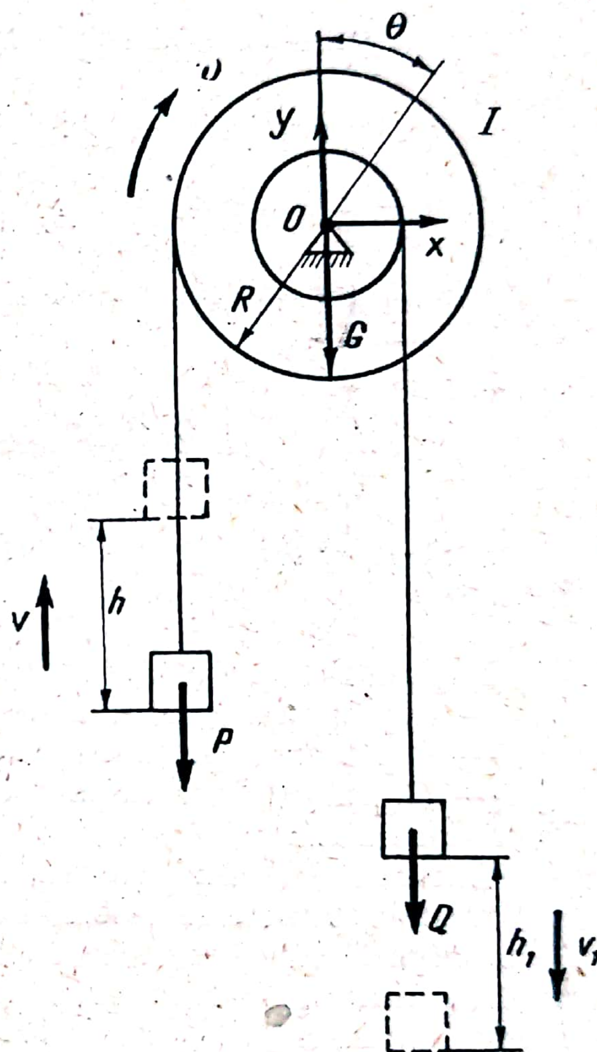


Fig. 10.2.

Expresiile energiei cinetice alese după mişcările corpurilor care compun sistemul sînt:

— pentru greutăţile P şi Q aflate în mişcare de translaţie avem:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2;$$

— pentru scripetele aflat în mişcare de rotaţie:

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Energiile fiecărui corp pentru cele două poziţii au următoarele valori :

— pentru greutatea P :

$$E_A=\frac{1}{2}Mv_A^2=0;\quad E_B=\frac{1}{2}Mv_B^2=\frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\,v^2;$$

— pentru scripete :

$$E_A=\frac{1}{2}J\omega_A^2=0,\quad E_B=\frac{1}{2}J\omega_B^2=\frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2};$$

— pentru greutatea Q :

$$E_A=\frac{1}{2}M_1v_{1A}^2=0,\quad E_B=\frac{1}{2}M_1v_{1B}^2=\frac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\,\frac{r^2}{R^2}\,v^2.$$

Însumînd energiile, obţinem energia întregului sistem :

$$E_A=0,$$

$$E_B=\frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\,v^2+\frac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\,\frac{r^2}{R^2}v^2+\frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2}=\frac{v^2}{2g}\left(P+Q\frac{r^2}{R^2}+\frac{J}{R^2}\right).$$

Forţele exterioare care acţionează sistemul sînt în număr de cinci :

$$P, Q, G, X, Y.$$

Deplasările punctelor de aplicaţie ale acestor forţe sînt :

— deplasarea punctului de aplicaţie al forţei P este h ;

— deplasarea punctului de aplicaţie al forţei Q este h_1;

— deplasarea punctului comun de aplicaţie al forţelor G, X, Y este nulă.

Deoarece sistemul are un singur grad de libertate, deplasările tuturor punctelor sistemului se exprimă ca funcţii numai de o singură deplasare aleasă drept necunoscută ; alegînd drept necunoscută deplasarea greutăţii P (a cărei viteză am ales-o drept necunoscută) şi exprimînd faptul că deplasările celor două fire care susţin greutăţile sînt egale cu cele ale punctelor de pe scripete, obţinem :

de unde :

$$h=R\theta,\qquad h_1=r\theta,$$

de unde:

$$\theta=\frac{h}{R},\qquad h_1=\frac{r}{R}h. \tag{10.8}$$

Observăm că relaţiile dintre deplasări se obţin înlocuind, în relaţiile dintre viteze, vitezele prin deplasări.

Lucrurile mecanice ale celor cinci forțe exterioare care acționează sistemul în deplasarea sa din poziția A în poziția B sînt:

— lucrul mecanic al forței P: $L_{A-B}=-Ph$ [formula (9.6)];

— lucrul mecanic al forței Q: $L_{A-B}=Qh_1=Q\frac{r}{R}h$ [formula (9.6)];

— lucrurile mecanice ale forțelor G, X, Y: $L_{A-B}=0$.

Lucrul mecanic al forțelor interioare este nul deoarece corpurile sînt rigide, iar firele inextensibile.

Însumînd rezultatele, obținem lucrul mecanic total:

$$L_{A-B}=-Ph+Q\frac{r}{R}h=\left(Q\frac{r}{R}-P\right)h.$$

Înlocuind rezultatele în formula (10.6) obținem:

$$\frac{v^2}{2g}\Bigl(P+Q\frac{r^2}{R^2}+\frac{Jg}{R^2}=\left(Q\frac{r}{R}-P\right)h,$$

de unde:

$$v=\sqrt{\frac{2g\left(Q\frac{r}{R}-P\right)}{P+Q\frac{r^2}{R^2}+\frac{Jg}{R^2}}h}.$$

Se observă că viteza greutății P este variabilă cu distanța h. Dacă se notează:

$$a=\frac{g\left(Q\frac{r}{R}-P\right)}{P+Q\frac{r^2}{R^2}+\frac{Jg}{R^2}},$$

valoarea lui v se mai scrie:

$$v=\sqrt{2ah},$$

care comparată cu formula (5.12) arată că a este accelerația mișcării de translație rectilinie a greutății P, care este constantă. Rezultă de aci că greutatea P are o mișcare rectilinie uniform variată; legile de mișcare ale celor trei corpuri componente ale sistemului sînt:

$$h=\frac{1}{2}at^2;\ \theta=\frac{h}{R}=\frac{1}{2R}at^2,$$

$$h_1=\frac{r}{R}h=\frac{r}{2R}at^2.$$

Cu aceasta, mișcarea întregului sistem este complet determinată.

În cazul particular $a = 0$, rezultă $h = 0 = h_1 = 0$, adică sistemul rămîne în reapus; aceasta este condiția de echilibru static.

Calculul efectuat la acest exemplu poate fi rezumat în tabela 10.4.

Tabela 10.4.

Rezultatele calculelor în cazul mișcării unui sistem

Corpul	Distribuția de viteze	Energia cinetică		Forțe exterioare	Deplasările punctelor de aplicație	Lucrul mecanic
		În poziția A	În poziția B			
1	Translație rectilinie cu viteza v	$E_A = 0$	$E_B = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$	P	h	$-Ph$
2	Rotație în jurul unei axe fixe cu viteza unghiulară $\omega = \frac{v}{R}$		$E_B = \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2}$	Q	$h_1 = \frac{r}{R}h$	$Q\frac{r}{R}h$
				G	0	0
				X	0	0
	Translație rectilinie cu viteza $v_1 = \frac{r}{R}v$		$E_B = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\frac{r^2}{R^2}v^2$	Y	0	0

d) **Legea conservării energiei.** Să considerăm o minge elastică atîrnată printr-un fir în punctul A situat la distanța h deasupra pămîntului (fig. 10.3, a). Dacă tăiem firul și lăsăm corpul să cadă, el va căpăta o viteză din ce în ce mai mare pînă ce va atinge solul în punctul B; dacă nu există nici un fel de frecări, după ciocnirea din B el va căpăta o viteză orientată de la B către A care va scădea din ce în ce pînă ce corpul va ajunge din nou în punctul A și mișcarea se va repeta în același mod la nesfîrșit. Același fenomen se petrece și în cazul pendulului din figura 10.3, b sau al greutății atîrnată de resort (fig. 10.3, c); toate aceste corpuri execută mișcări oscilatorii (în primul caz, mișcarea oscilatorie este combinată și cu o ciocnire) care, în absența oricărei pierderi de energie prin frecare cu mediul înconjurător, nu se amortizează niciodată. În timpul acestor mișcări, variază atît viteza corpului, cît și poziția sa în raport cu solul, adică variază atît energia sa cinetică cît și energia potențială; într-adevăr, în toate cele trei cazuri considerate

în figura 10.3, pozițiile A sînt caracterizate prin viteză nulă (deci energie cinetică nulă) și energie potențială maximă (în fig. 10.3, a și b); energia potențială este datorită numai poziției corpului, pe cînd în figura 10.3, c, energia potențială este datorită

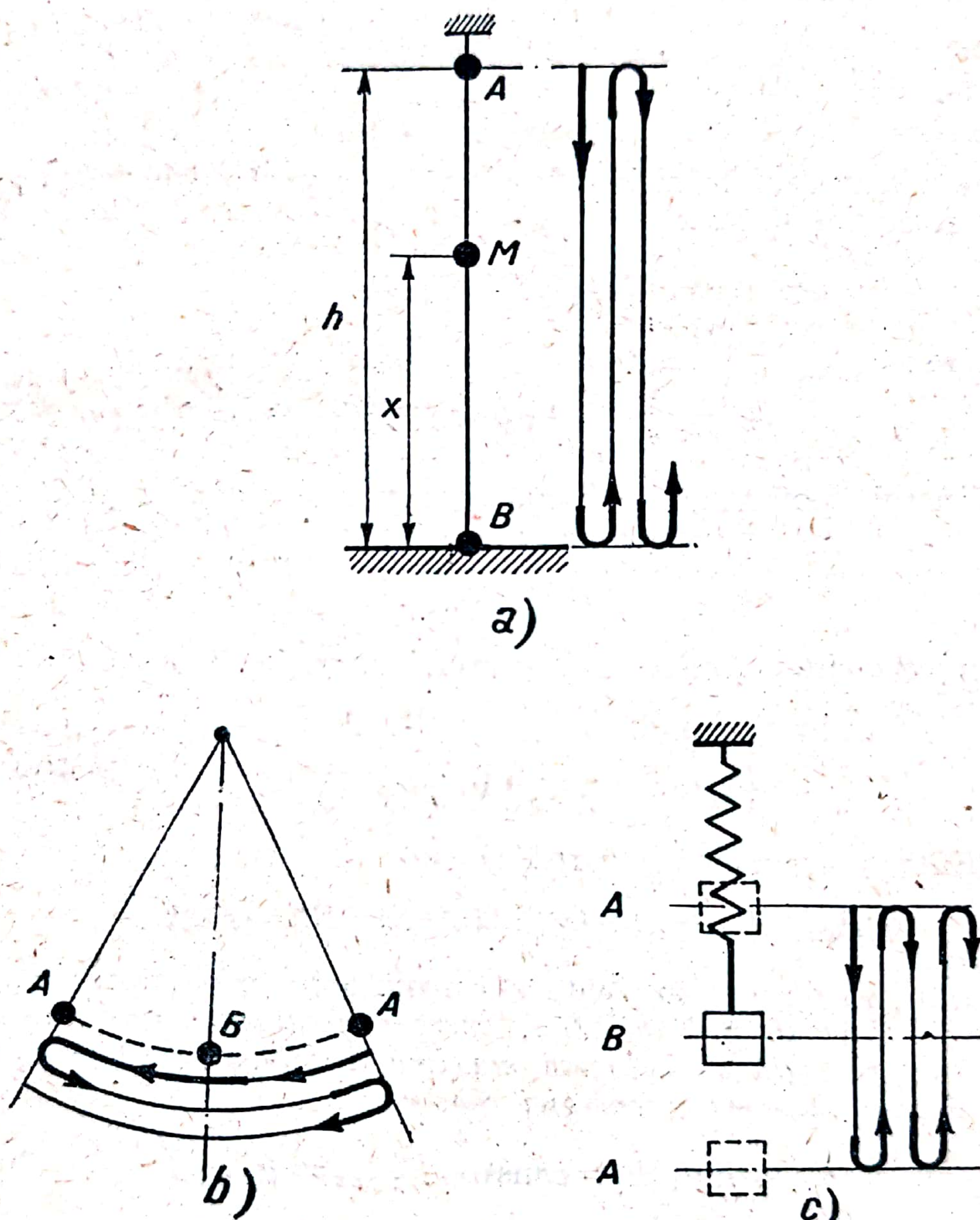


Fig. 10.3.

atît poziției corpului cît și acelei a resortului; de aceea, în figura 10.3, a și b pozițiile A sînt situate la înălțimea cea mai mare deasupra solului, pe cînd în figura 10.3, c aceasta nu se mai întîmplă; pozițiile B sînt caracterizate prin energia potențială minimă și viteza maximă, deci energia cinetică maximă.

Să calculăm pentru exemplul din figura 10.3,*a* care este valoarea energiei cinetice și a energiei potențiale într-o poziție oarecare M situată între pozițiile A și B; dacă notăm prin x depărtarea punctului M de sol și prin $m=\frac{G}{g}$ masa corpului, avem:

$$E_p=Gx, \qquad E_c=\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,v^2,$$

v fiind viteza mobilului în M; viteza v se poate calcula cu ajutorul formulei (5.12):

$$v=\sqrt{2\,g\,(h-x)},$$

cu care:

$$E_c=\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}2g(h-x)=G(h-x).$$

Energia potențială maximă a corpului se află în poziția A unde $x=h$; ea are valoarea:

$$E_{p\ max}=Gh,$$

iar energia cinetică maximă se află în poziția B, unde $x=0$ și are valoarea:

$$E_{c\ max}=\frac{1}{2}\,\frac{G}{g}(\sqrt{2\,gh}\,)^2=Gh.$$

Energia mecanică a corpului este:

$$E_m=E_p+E_c=Gx+G(h-x)=Gh=\text{const.}$$

Din cele de mai sus deducem următoarea constatare importantă: *în tot timpul mișcării, energia mecanică a corpului este constantă și egală cu valoarea maximă a energiei potențiale sau cu valoarea maximă a energiei cinetice*:

$$E_m=E_c+E_p=\text{const.}=E_{p\ max}=E_{c\ max}. \qquad (10.9)$$

Cu alte cuvinte, energia totală mecanică a corpului nu se mărește și nu se micșorează ci se conservă în tot timpul mișcării. În mișcarea descendentă a corpului de la A către B, energia potențială scade, în timp ce energia cinetică crește, astfel încît scăderea energiei potențiale este compensată, suma lor rămînînd constantă. În mișcarea ascendentă, fenomenul se inversează: energia cinetică scade în timp ce energia potențială crește, trecînd prin aceleași valori ca în cazul căderii.

Din punct de vedere practic se constată că fenomenul căderii corpului reprezentat în figura 10.3, *a* nu se repetă la infinit, ci după cîteva mişcări în care înălţimea *h* scade din ce în ce, el se opreşte în punctul *B*; în această situaţie, energia sa mecanică este nulă. Rezultă de aci că energia mecanică nu s-a conservat, ci s-a consumat în timpul mişcării. Aceasta se explică prin aceea că în calculul pe care l-am efectuat nu am ţinut seama de o serie de pierderi de energie prin frecare cu aerul, prin deformaţia din punctul *B* şi în general de o serie de fenomene (degajare de căldură, fenomene luminoase etc.) care însoţesc ciocnirea din *B*.

Formula (10.9) nu este valabilă decît într-un spaţiu în care fenomenele enumerate nu au loc. Consumarea energiei mecanice nu se face însă cu pierderi ci cu transformări în alte energii, ca: energie calorică, luminoasă, electrică, magnetică, energii care se produc o dată cu mişcarea mecanică.

De aceea, în universul nostru real legea conservării energiei se prezintă sub următoarea formă mai generală: suma tuturor energiilor (cinetică, potenţială, termică, electrică, magnetică) este constantă pentru un sistem izolat aflat în mişcare:

$$E_p + E_c + W = \text{const.}, \tag{10.10}$$

unde s-a notat prin W energiile termică, electrică, magnetică etc.

Relaţia (10.10) este valabilă dacă sistemul considerat nu este acţionat de forţe exterioare care ar mări sau micşora energia totală.

Din relaţia (10.10) mai rezultă că cu timpul E_p şi E_c descresc, iar W creşte, ceea ce conduce (în cazul sistemului izolat) la oprirea mişcării; de aci rezultă imposibilitatea realizării unui perpetuum mobile.

3. Teorema impulsului

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material de masă m aflat în mişcare rectilinie cu viteza v şi acceleraţia a, acţionat de o forţă F pe direcţia mişcării sale. Conform principiului al doilea al mecanicii, avem:

$$F = ma. \tag{10.11}$$

56—68

Membrul al doilea al acestei expresii mai poate fi scris însă şi sub forma :

$$m\,a = m\,\frac{dv}{dt} = \frac{d\,(mv)}{dt} = \frac{dh}{dt}\,, \qquad (10.12)$$

deoarece masa m este o constantă; produsul mv reprezintă impulsul h al punctului M. Egalînd între ele expresiile (10.11) şi (10.12) obţinem :

$$\frac{dh}{dt} = ma = F, \qquad (10.13)$$

adică derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta forţelor exterioare care acţionează punctul.

b) **Solidul rigid şi sistemul de solide rigide.** După cum am văzut, impulsul unui solid rigid are aceeaşi formă ca şi impulsul unui punct material, cu deosebirea că m reprezintă masa întregului corp, iar a reprezintă acceleraţia centrului său de greutate. Dacă considerăm mişcarea centrului de greutate al solidului căruia îi atribuim ca forţă care-l acţionează rezultanta forţelor aplicate solidului, teorema impulsului pentru acest punct se scrie :

$$\frac{dH}{dt} = Ma_G = F, \qquad (10.14)$$

adică derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui corp este egală cu rezultanta forţelor exterioare care acţionează corpul.

În proiecţii pe axele unui triedru cartezian, ecuaţia (10.14) se transformă în următoarele relaţii scalare :

$$Ma_{Gx} = F_x\,,$$
$$Ma_{Gy} = F_y\,,$$
$$Ma_{Gz} = F_z\,.$$

c) **Legea conservării impulsului.** Să presupunem că asupra unui punct material nu acţionează nici o forţă ; în acest caz, derivata impulsului său, după formula (10.12), este nulă :

$$\frac{dh}{dt} = 0 \qquad (10.15)$$

Aceasta înseamnă că impulsul h este constant, deoarece nu mai derivata unei constante e nulă :

$$h = \text{constant}, \qquad (10.16)$$

sau altfel spus:

$$mv = \text{constant}. \tag{10.17}$$

Această concluzie se păstrează şi în cazul mai multor puncte sau în cazul unui solid rigid. Spre exemplu, pentru cazul a două puncte de mase m_1 şi m_2 avînd mişcări rectilinii pe aceeaşi axă, cu vitezele v_1 şi v_2, teorema conservării impulsului se scrie:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = \text{constant}. \tag{10.18}$$

4. Metoda cinetostatică (metoda lui d'Alembert)

a) **Punctul material.** Să considerăm un punct material M supus acţiunii unei forţe $\overline{F}$ (rezultanta forţelor exterioare date şi de legătură care acţionează punctul). Conform principiului al doilea al mecanicii avem:

$$\overline{F} = m\overline{a}. \tag{10.19}$$

Vom presupune că $\overline{F} \neq 0$ şi deci şi $\overline{a} \neq 0$.

Să trecem totul în membrul I al relaţiei (10.19); obţinem:

$$\overline{F} + (-m\overline{a}) = 0. \tag{10.20}$$

Dar $-m\overline{a} = \overline{F}_i$ este forţa de inerţie a punctului considerat; avem deci:

$$\overline{F} + \overline{F}_i = 0 \tag{10.21}$$

sau dacă includem şi forţa de inerţie printre celelalte forţe care acţionează punctul, obţinem:

$$\Sigma\overline{F} = 0, \tag{10.22}$$

adică o ecuaţie analogă cu aceea obţinută în cazul echilibrului punctului material. Deosebirea dintre aceste ecuaţii constă în aceea că pe cînd ecuaţia din statică exprimă echilibrul real al punctului material supus la acţiunea unor forţe care-i sînt aplicate, ecuaţia (10.22) exprimă echilibrul punctului M sub acţiunea unor forţe care nu-i sînt toate aplicate lui; într-adevăr, după cum am văzut, forţa de inerţie este aplicată în mod convenţional punctului M, căci în realitate ea acţionează asupra corpului care pune punctul în mişcare. De aceea vom spune că ecuaţia (10.22) este o ecuaţie de echilibru fictiv dinamic (sau

formal), pe cînd ecuaţia corespunzătoare din statică reprezintă o ecuaţie de echilibru real. Într-adevăr, dacă echilibrul punctului M ar fi real, conform principiului inerţiei, punctului s-ar afla în repaus sau s-ar mişca rectiliniu şi uniform, deci $a=0$, ceea ce contravine ipotezei făcute la începutul acestui paragraf.

Rezultatul obţinut mai sus poate fi enunţat astfel: *în mişcarea unui punct material, în orice moment, forţele date, forţele de legătură şi forţa de inerţie îşi fac echilibru.*

Metoda de rezolvare a problemelor de dinamică bazată pe acest principiu se numeşte *metoda cinetostatică* sau *principiul lui d'Alembert.*

b) **Solidul rigid şi sistemul de solide rigide**. Dacă în locul unui singur punct material vom considera un solid rigid, fiecare moleculă a corpului, considerată ca un punct, material, se va afla în fiecare moment al mişcării în echilibru dinamic şi deci întregul corp se va afla în echilibru dinamic la momentul considerat. Adunînd între ele relaţiile de forma (10.21) găsim:

$$\Sigma\overline{F}+\Sigma\overline{F}_i=0 \text{ sau } \Sigma\overline{F}=0, \tag{10.23}$$

precum şi ecuaţia:

$$\Sigma\overline{M}_o+\Sigma\overline{M}_{io}=0 \text{ sau } \Sigma\overline{M}_o=0. \tag{10.24}$$

Dar $\Sigma\overline{F}$ şi $\Sigma\overline{M}_0$ reprezintă elementele de reducere ale forţelor date şi de legătură în raport cu punctul O, iar $\Sigma\overline{F}_i$ şi $\Sigma\overline{M}_{io}$ reprezintă elementele de reducere ale forţelor de inerţie ale corpului în raport cu acelaşi punct. Acestea sînt ecuaţiile de echilibru fictiv dinamic al solidului rigid aflat în mişcare. Acest rezultat este valabil şi pentru un sistem de solide rigide.

Principiul lui d'Alembert în forma lui generală poate fi deci enunţat astfel: *un punct material, un solid rigid sau un sistem de solide rigide se află în fiecare moment în echilibru fictiv, dinamic, sub acţiunea forţelor exterioare date şi de legătură, precum şi sub acţiunea forţelor de inerţie.*

Metoda aceasta a echilibrului fictiv dinamic a fost introdusă în mecanică de către învăţatul francez Jean le Rond d'Alembert; ea constituie o metodă simplă şi foarte des întrebuinţată pentru studiul mişcării sistemelor materiale.

Cu ajutorul metodei lui d'Alembert orice problemă de dinamică se transformă într-o problemă de statică, adăugînd pe lîngă forţele şi cuplurile din statică forţele şi cuplurile de inerţie.

c) **Indicații metodice privind aplicarea metodei lui d'Alembert.** Metoda cinetostatică servește atît la studiul mișcării cît și la determinarea reacțiunilor dinamice. Aplicarea ei la rezolvarea problemelor de dinamică se face urmărind în general următoarea ordine:

— se separă corpurile și se figurează forțele și cuplurile din statică (forțele și cuplurile date sau provenind din eliberarea corpurilor de legături);

— se stabilesc mișcările tuturor corpurilor sistemului, precum și distribuția accelerațiilor în poziția considerată; în general, accelerațiile tuturor corpurilor se exprimă ca funcții de una au mai multe accelerații alese drept necunoscute;

— se aleg elementele de inerție (forțe și cupluri) după mișcarea pe care o au corpurile care alcătuiesc sistemul și se figurează pe fiecare corp în parte;

— se scriu ecuațiile de echilibru fictiv dinamic; acestea sînt aceleași ecuații ca în cazul static. Se rezolvă sistemul de ecuații și se determină mișcarea sistemului și reacțiunilor legăturilor.

E x e m p l u. Se cere să se studieze mișcarea și să se determine reacțiunile sistemului reprezentat în figura 10. 2; frecările se vor neglija.

Pentru rezolvare vom urmări ordinea indicată mai sus.

Se separă corpurile și se figurează forțele și cuplurile din statică; acestea sînt (fig. 10.4) date în tabela 10.5.

Mișcările, distribuțiile de accelerații și forțe și cuplurile de inerție ale celor trei corpuri sînt date în tabela 10.6.

Relațiile dintre accelerații au fost deduse derivînd expresiile vitezelor $v = R\omega$ și $v_1 r\omega$ (fig. 10.5):

Tabela 10.5

Forțele date și forțele de legătură

Corpul	Forțe date	Forțe de legătură
Greutatea P	P	T_1
Scripetele	G	X, Y, T_1, T_2
Greutatea Q	Q	T_2

$$a = R\varepsilon \qquad a_1 = r\varepsilon,$$

de unde:

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \qquad a_1 = \frac{r}{R}a.$$

Forțele și cuplurile de inerție au fost calculate cu formulele corespunzătoare cazului de mișcare respectiv; ele sînt figurate punctat în sens invers accelerațiilor respective.

Ecuațiile de echilibru sînt:

— pentru greutatea P

$$(\Sigma F_y = 0)$$

$$T_1 - P - \frac{P}{g}\, a = 0;$$

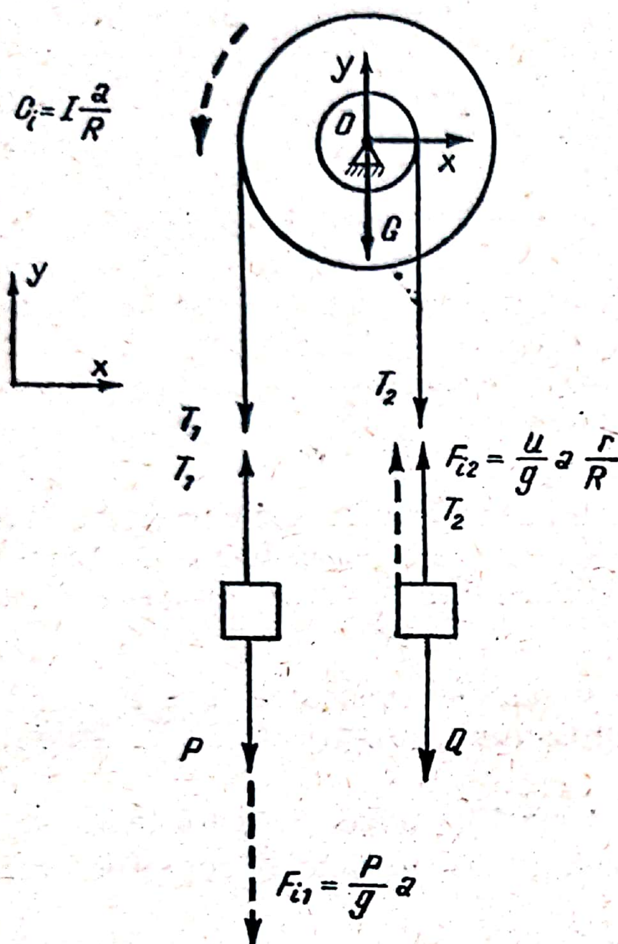


Fig. 10.4.

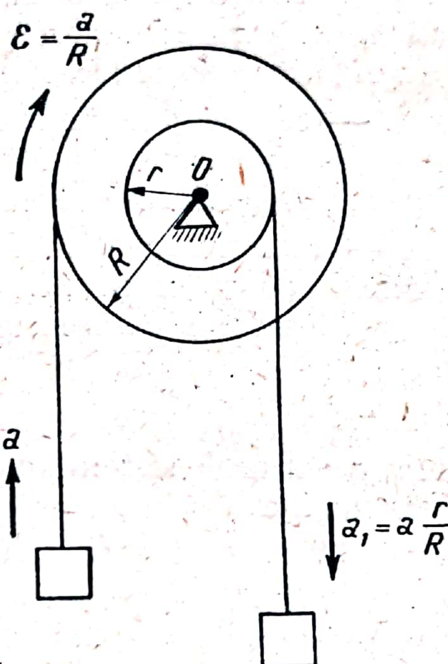


Fig. 10.5.

— pentru scripete:

$$(\Sigma F_x = 0) \qquad X = 0,$$

$$(\Sigma F_y = 0) \qquad -T_1 - G - T_2 + Y = 0,$$

$$(\Sigma M_o = 0) \qquad T_1 R + I\frac{u}{R} - T_2 r = 0;$$

— pentru greutatea Q:

$$(\Sigma F_y = 0) \qquad T_2 + \frac{Q}{g}\, a\, \frac{r}{R} - Q = 0.$$

Sistemul acestor ecuații are următoarele soluții:

$$a = g\,\frac{Q\frac{r}{R} - P}{P + Q\frac{r^2}{R^2} + \frac{Ig}{R^2}} = \text{const.},$$

Tabela 10.6

Forțe și cupluri de inerție

Corpul	Mișcarea	Forțe și cupluri de inerție
Greutatea P	Translație rectilinie cu accelerația $\bar{a}$	o forță de inerție $F_{i\,1} = \frac{P}{g} a$
Scripetele	Rotație în jurul unei axe fixe cu accelerația unghiulară $\varepsilon = \frac{a}{R}$	un cuplu de inerție $C_i = I\,\varepsilon = I\,\frac{a}{R}$
Greutatea Q	Translație rectilinie cu accelerația $a_1 = a\,\frac{r}{R}$	o forță de inerție $F_{i\,2} = \frac{Q}{g}\,a_1 = \frac{Q}{g}\,a\,\frac{r}{R}$

$$T_1 = P\left(1 + \frac{a}{g}\right);\; X = 0;\; T_2 = T_1\,\frac{R}{r} + I\,\frac{a}{Rr} =$$

$$= P\left(1 + \frac{a}{g}\right)\frac{R}{r} + I\,\frac{a}{Rr};$$

$$Y = T_1 + T_2 + G = P\left(1 + \frac{a}{g}\right)\left(\frac{R}{r} + 1\right) + J\,\frac{a}{Rr} + G$$

În valorile reacțiunilor trebuie înlocuită valoarea lui a.

Cu aceasta, mișcarea sistemului și reacțiunilor sînt determinate; într-adevăr, cunoscînd accelerația a, se cunosc accelerațiile ε și a_1. Cele trei corpuri ale sistemului au mișcări uniform variate; legea lor de mișcare este de forma (5.10):

În cazul particular cînd:

$$Q\,\frac{r}{R} = P,$$

avem $a=0$ și deci corpurile sistemului se află în repaus sau se mișcă în translație rectilinie și uniformă (greutățile P și Q) sau se rotesc uniform (scripetele). Aceasta reprezintă condiția de echilibru a sistemului.

Capitolul XI

APLICAREA METODELOR GENERALE ŞI A PRINCIPIILOR MECANICII LA STUDIUL MIŞCĂRILOR PARTICULARE ALE PUNCTULUI MATERIAL ŞI SOLIDULUI RIGID

1. Dinamica punctului material

Primul şi totodată cel mai simplu sistem material cu studiul mişcării căruia se ocupă dinamica este punctul material. După cum am mai arătat, cu ajutorul mişcării unui punct material putem aproxima mişcarea anumitor corpuri reale din natură.

Studiul mişcării punctului material prezintă în anumite cazuri dificultăţi matematice foarte mari, care uneori nu au putut fi rezolvate în mod satisfăcător nici pînă în prezent.

În cele ce urmează ne vom preocupa numai de acele mişcări ale punctului material care pot fi încadrate în cele trei mari tipuri de mişcări studiate în cadrul cinematicii : mişcarea uniformă, mişcarea uniform variată şi mişcarea oscilatorie armonică. Aceasta revine la a spune că vom studia numai acele mişcări pentru care parametrii geometrici care determină poziţia momentană a punctului au expresii de forma celor care există în cazul mişcărilor menţionate. Valorile constantelor A, B, C, φ, ω din expresiile mărimilor geometrice q care caracterizează poziţia punctului se determină cu ajutorul condiţiilor iniţiale.

Dintre metodele generale ale mecanicii pentru rezolvarea problemelor de dinamică, vom aplica în cazul mişcării punctului în special ecuaţia $F = ma$ şi teorema energiei cinetice.

a) **Punctul material liber.** Ne propunem să studiem mişcarea unui punct material liber, adică nesupus nici unei legături. În acest caz, datele şi necunoscutele sînt :

Date :

— forţe : toate forţele care acţionează punctul material într-o poziţie oarecare a sa $M(x, y, z)$ la un moment oarecare t;

— mărimi geometrice şi mecanice : masa m a punctului;

— condiţii iniţiale : poziţia punctului la momentul $t = t_0$ al începerii mişcării $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi viteza punctului $v_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ în această poziţie ;

Necunoscute :

— mişcarea punctului material, caracterizată prin coordonatele sale x, y, z ca funcţii de timp. O dată cunoscute aceste coordonate, se poate face un studiu cinematic al mişcării punctului determinînd cele trei caracteristici ale mişcării sale : traiectoria şi proiecţiile vitezei şi acceleraţiei punctului pe axele unui triedru cartezian.

În cazul punctului material liber nu există reacţiuni ; în unele probleme se poate cere însă să se determine anumite forţe necunoscute care acţionează punctul, în scopul realizării unei mişcări date.

Metoda de bază în studierea mişcării punctului material o constituie aplicarea celor trei ecuaţii date de principiul al doilea al mecanicii. Anumite probleme simple în care nu se cer toate necunoscutele de mai sus pot fi rezolvate mai uşor prin aplicarea teoremei energiei cinetice.

b) **Punctul material supus la legături**. Pentru a studia mişcarea punctului material supus la legături, vom îndepărta mai întîi legăturile introducînd în locul lor, aşa cum am procedat şi la statică, forţele de legătură. În urma acestei operaţii, punctul material devine liber şi i se pot aplica cele trei ecuaţii ale teoremei impulsului, la fel ca în cazul punctului liber.

Legăturile în cazul mişcării punctului sînt aceleaşi ca în statică : simpla rezemare şi prinderea cu fire sau bare. În cazul unui punct mobil pe o suprafaţă, forţele de legătură sînt o reacţiune normală pe suprafaţă, de modul necunoscut N, şi o forţă de frecare de modul μN, dirijată în sens invers vitezei punctului, iar în cazul firului şi barei o forţă de mărime necunoscută dirijată pe direcţia firului sau barei.

Datele şi necunoscutele problemelor sînt în general aceleaşi ca şi în cazul punctului material liber, cu deosebirea că apar în plus drept necunoscute modulele forţelor de legătură.

Numărul ecuaţiilor pentru rezolvarea problemelor este acelaşi : cele trei ecuaţii ale principiului al doilea al dinamicii.

Deoarece au apărut necunoscute în plus, s-ar părea că problemele de dinamica punctului material supus la legături sînt nedeterminate ; în realitate, din cauza legăturilor, coordonatele x, y, z ale punctului nu mai pot lua orice valori, ci sînt supuse la un număr de relaţii care se adaugă ecuaţiilor mişcării. Aceste relaţii diferă de la caz la caz, după felul legăturii.

c) **Mişcarea punctului material greu în vid şi în aer.** *Aruncarea pe verticală.* Să studiem mişcarea pe care o are un punct material liber de masă m aruncat pe verticală în vid cu viteza inițială v_0 din originea axelor de coordonate. Vom presupune că nu cunoaştem dinainte faptul că acest punct se va deplasa numai pe verticală (fig. 11.1).

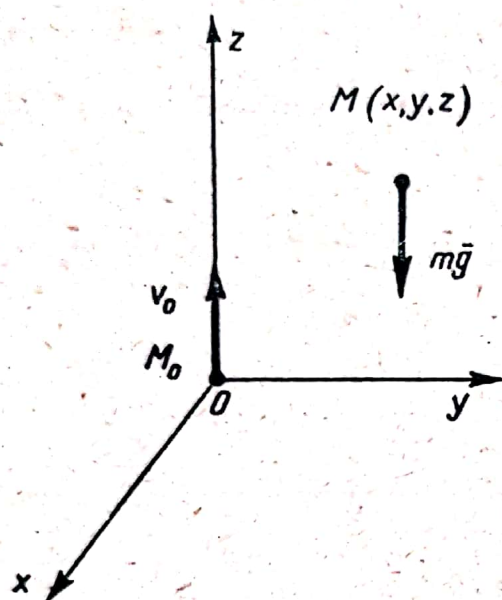


Fig. 11.1.

Pentru rezolvare, alegem un sistem de axe $Oxyz$ avînd Oz ca axa verticală şi stabilim datele şi necunoscutele problemei conform tabelei 11.1.

Ecuațiile mişcării punctului sînt :

$$ma_x = \Sigma F_x,$$
$$ma_y = \Sigma F_y, \qquad (11.1)$$
$$ma_z = \Sigma F_z.$$

Singura forță care acționează punctul este greutatea sa $m\bar{g}$, care, pentru o poziție oarecare din timpul mişcării, are proiecțiile :

$$\Sigma F_x = 0, \ \Sigma F_y = 0, \ \Sigma F_z = -mg. \qquad (11.2)$$

Tabela 11.1

Date şi necunoscute la mişcarea punctului material greu în vid

Date	Forțe		$m\bar{g}$
	Mărimi geometrice şi mecanice		m
	Condiții inițiale	Poziția la $t=0$	$x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=0$
		Viteza la $t=0$	$v_{0x}=0,\ v_{0y}=0,\ v_{0z}=v_0$
Necunoscute	Mişcarea		$x=x(t)$ $y=y(t)$ $z=z(t)$

Înlocuind în ecuaţiile de mişcare, obţinem :

$$ma_x = 0,$$
$$ma_y = 0, \qquad (11.3)$$
$$ma_z = -mg.$$

Simplificînd cu m obţinem :

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g. \qquad (11.4)$$

Comparînd aceste ecuaţii cu ecuaţiile (5.9) şi (5.11), deducem că proiecţiile punctului studiat se mişcă pe axele Ox, şi Oy uniform, iar pe axa Oz uniform întîrziat (acceleraţia a este constantă şi negativă). Expresiile coordonatelor punctului mobil sînt date de formula (5.6) pentru x şi y şi de formula (5.10) pentru z :

$$x = At + B,$$
$$y = Ct + D, \qquad (11.5)$$
$$z = Et^2 + Ft + G,$$

unde $A, \ldots, G$ sînt nişte constante care vor fi determinate din condiţiile iniţiale date în problemă.

Dacă derivăm o dată aceste coordonate găsim proiecţiile vitezei punctului M pe axele sistemului $Oxyz$:

$$v_x = A,$$
$$v_y = C, \qquad (11.6)$$
$$v_z = 2Et + F.$$

Dacă mai derivăm încă o dată, găsim proiecţiile acceleraţiei :

$$a_x = 0,$$
$$a_y = 0, \qquad (11.7)$$
$$a_z = 2E.$$

Comparînd între ele ultimele ecuaţii ale celor două sisteme găsim valoarea constantei E :

$$2E = -g, \quad E = -\frac{g}{2}. \qquad (11.8)$$

Să determinăm din ecuaţiile (11.6) şi (11.7) valorile coordonatelor punctului şi ale proiecţiilor vitezei pe axe la $t = 0$; găsim :

$$x_0 = B, \quad v_{0x} = A,$$
$$y_0 = D, \quad v_{0y} = C, \qquad (11.9)$$
$$z_0 = G, \quad v_{0z} = F.$$

Ele au fost determinate înlocuind pe $t = 0$ în ecuaţiile (11.5) şi (11.6). Dacă comparăm acum aceste valori cu cele date în problemă, deducem valorile constantelor :

$$B = D = G = 0, \quad A = C = 0, \quad F = v_0. \qquad (11.10)$$

Cu aceasta, toate constantele sînt determinate şi putem înlocui rezultatele în ecuaţiile (11.5); obţinem :

$$x = 0,$$
$$y = 0, \qquad (11.11)$$
$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t.$$

Aceste ecuaţii constituie rezultatul problemei. Din ele rezultă că punctul mobil are în tot timpul mişcării coordonatele x şi y nule; cum singurele puncte care au aceste coordonate nule sînt punctele axei Oz, rezultă că punctul mobil se va deplasa pe această axă. Aceasta este traiectoria punctului. Mişcarea sa pe această axă, după cum o arată cea de-a treia ecuaţie, este o mişcare uniform variată.

Aruncarea înclinată. Să studiem mişcarea pe care o are un punct în aceleaşi condiţii ca în problema precedentă, cu deosebirea că în loc ca viteza iniţială v_0 să fie dirijată pe verticală ea este înclinată faţă de orizontală cu unghiul α (fig. 11.2). Datele, necunoscutele şi chiar ecuaţiile mişcării rămîn aceleaşi, cu excepţia condiţiilor iniţiale privind viteza punctului; componentele vitezei iniţiale vor fi în acest caz :

$$v_{ox} = 0, \quad v_{0y} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha.$$

Toate rezultatele de mai sus rămîn valabile, cu excepţia constantelor C şi F care acum au valorile :

$$C = v_{0y} = v_0 \cos \alpha,$$
$$F = v_{0z} = v_0 \sin \alpha.$$

Înlocuind în ecuațiile (11.5) obținem :

$$x=0,$$
$$y=v_0 t \cos \alpha \qquad (11.12)$$
$$z=-g\frac{t^2}{2}+v_0 t \sin \alpha.$$

Aceste ecuații constituie răspunsul la problemă.

De această dată numai coordonata x este nulă; aceasta înseamnă că punctul mobil trebuie să se afle în tot timpul mișcării sale în planul yOz, deoarece numai punctele din acest plan au coordonate x nulă.

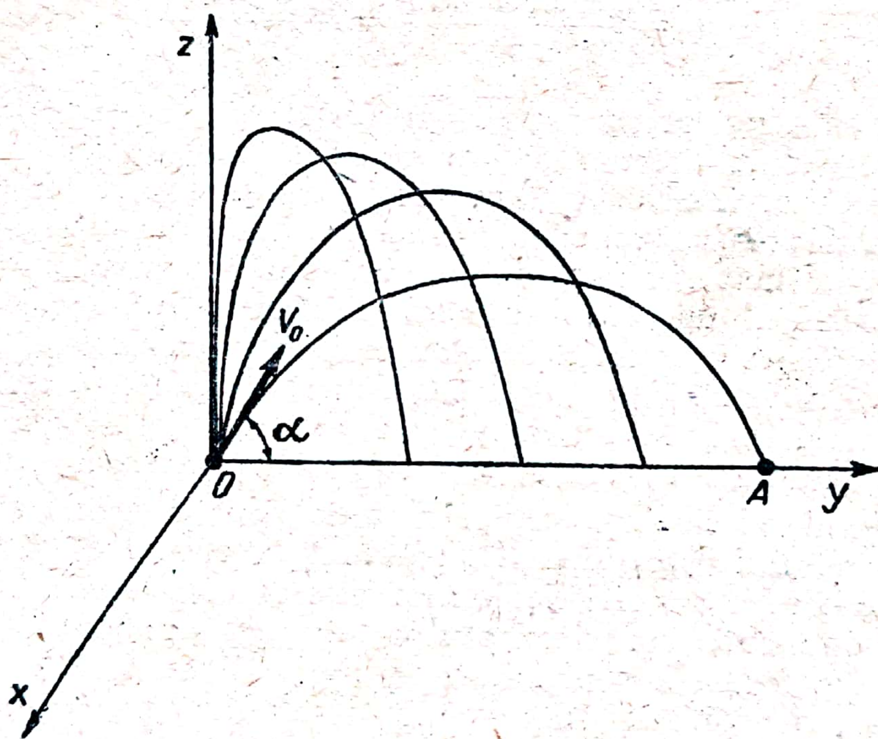


Fig. 11.2.

Dacă vom da acum lui t diferite valori și vom construi punctele $M(x, y, t)$, prin unirea lor vom determina traiectoria punctului mobil; ea este o curbă denumită parabolă.

Această problemă are aplicații în cazul mișcării proiectilelor trase de diferite arme; astfel, traiectoria glonțului tras de un vînător este o parabolă și mișcarea glonțului din momentul expulzării lui din pușcă pînă la atingerea țintei se face după legile exprimate de ecuațiile (11.12)

Să determinăm coordonatele punctului A (fig. 11.2). Acest punct este caracterizat prin aceea că $z = 0$; din ecuațiile (11.12) deducem :

$$\frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha = 0,$$

de unde obținem două soluții :

$$t_1 = 0 \text{ și } t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (11.13)$$

Prima soluție corespunde originii O ; introducînd cea de-a doua soluție în expresia coordonatei y dată de (11.12), obținem:

$$y_A = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (11.14)$$

Distanța y_A poată numele de „bătaie" ; ea reprezintă distanța de cădere a punctului pe sol, măsurată de la locul lansării. Se observă că ea este maximă pentru o viteză inițială de aceeași valoarea v_0 atunci cînd înclinarea acestei viteze este de așa natură încît $\sin 2\alpha$ este maxim, adică pentru $\alpha = 45°$.

În studiul mișcărilor punctului efectuat pînă aci nu s-a ținut seama de rezistența aerului. Experiența arată că forța de rezistență a aerului, care este tot timpul tangentă la traiectoria punctului și dirijată invers vitezei acestuia, joacă un rol important modificînd sensibil caracteristicile mișcării punctului.

Studiul mișcării punctului material ținînd seama și de rezistența aerului este dificil de efectuat, deoarece el conduce la rezultate care necesită calcule matematice complicate. Este important de menționat însă faptul că forța de rezistență a aerului depinde de forma corpului care se mișcă și de viteza acestuia. De aceea, o problemă importantă în tehnică, pentru corpurile care se deplasează în medii rezistente, o constituie determinarea formei lor optime pentru ca în timpul deplasării rezistența mediului exercitată asupra lor să fie minimă. Astfel prin studii și experiențe s-a ajuns la forme și profile optime, denumite forme și profile aerodinamice.

d) **Mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale.** Să ne imaginăm un punct material supus acțiunii unei forțe F care pentru orice poziție a punctului trece printr-un punct fix ; o asemenea forță poartă denumirea de *forță centrală*. Asemenea forțe se întîlnesc foarte des în natură ; astfel, forța cu care Pămîntul sau o altă planetă este atrasă de Soare este

o forță care trece printr-un punct fix (Soarele); forța cu care Pămîntul atrage orice corp de pe suprafața sa este o forță centrală (trece printr-un punct fix, centrul Pămîntului). Forțele cu care Pămîntul atrage diferite puncte ale unui solid sînt considerate paralele din cauza întinderii mici a corpului în raport cu Pămîntul; în realitate, ele sînt forțe concurente în centrul Pămîntului. Expresia forței de atracție dintre două corpuri a fost găsită de Isaac Newton; ea a fost formulată sub denumirea de legea atracției universale, care se enunță astfel: *două puncte materiale se atrag între ele proporțional cu produsul maselor și invers proporțional cu pătratul distanței.*

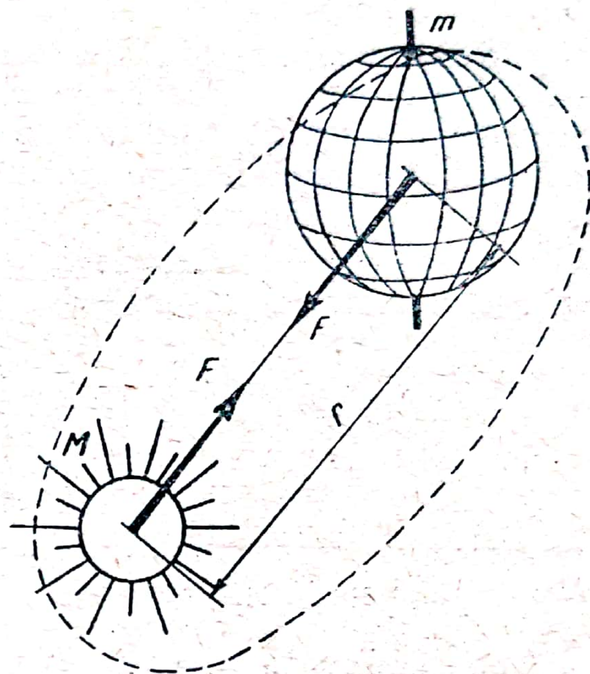


Fig. 11.3.

Dacă notăm cu m masa Pămîntului, cu M masa Soarelui și cu r distanța de la Pămînt la Soare într-o poziție oarecare, forța F cu care Soarele atrage Pămîntul are expresia (fig. 11.3):

$$F = k\frac{mM}{r^2}, \tag{11.15}$$

k fiind un coeficient de proporționalitate. În acest caz, atît Soarele cît și Pămîntul au fost considerate ca fiind reduse la centrele lor de greutate.

Studiul mișcării unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale depășește cadrul acestui curs; de aceea ne vom mărgini la a da numai anumite rezultate. Traiectoriile punctului în această mișcare sînt curbe denumite *conice* (curbe ce se obțin prin secționarea unui con), și anume: cercul, elipsa, hiperbola, parabola sau chiar o dreaptă. Sub acțiunea unei aceleași forțe centrale, un același punct poate descrie oricare dintre aceste curbe, după valoarea vitezei inițiale. Astfel, Pămîntul descrie în jurul Soarelui o elipsă avînd Soarele într-unul din focare. Prima planetă artificială a sistemului nostru solar, lansată din U.R.S.S. la 2 ianuarie 1959, descrie tot o elipsă avînd Soarele într-unul din focare, ceva mai turtită decît cea a Pă-

mîntului. Sateliţii artificiali lansaţi din U.R.S.S. au descris, după cum ştim, traiectorii eliptice în jurul Pămîntului, ca de-altfel şi navele ce au purtat în Cosmos pe primii cosmonauţi, cetăţenii sovetici J. A. Gagarin (12 aprilie 1961) şi G. S. Titov (6 august 1961).

Rezultatele obţinute din studiul mişcării punctului material sub acţiunea forţelor centrale constituie astăzi punctul de plecare al unei ştiinţe care a luat naştere în epoca noastră, cosmonautica, ştiinţă la care savanţii sovietici au adus contribuţii de o uriaşă însemnătate.

e) **Mişcarea oscilatorie a punctului material.** Să studiem mişcarea unui punct material sub acţiunea unei forţe constante ca direcţie, iar a cărei mărime variază proporţional cu punct fix de pe suportul forţei (fig. 11.4). O asemenea forţă poartă denumirea de *forţă elastică*; ea se întîlneşte în tehnică la resoarte. Traiectoria fiind cunoscută, va trebui să aflăm numai coordonata $x = x(t)$. Pentru aceasta, aplicăm prima dintre ecuaţiile (11.1):

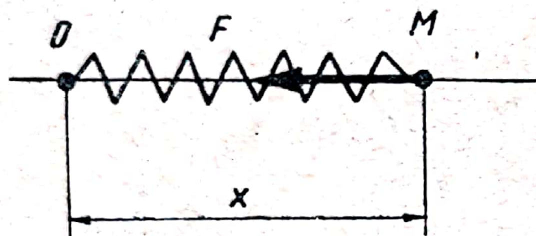


Fig. 11.4.

$$m\,a_x = \Sigma\, F_x.$$

Dar:

$$\Sigma\, F_x = -k_x$$

deoarece singura forţă care acţionează punctul este forţa elastică, k fiind un coeficient de proporţionalitate. Înlocuind, avem:

$$m a_x = -\,kx$$

sau:

$$a_x = -\,\frac{k}{m}\,x = -\,k_1 x. \tag{11.16}$$

k_1 fiind o constantă. Să comparăm acest rezultat cu cel dat de formula (5.15):

$$a = -\,\omega^2 q.$$

Deducem că mişcarea punctului mobil este o oscilaţie armonică cu pulsaţia:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{11.17}$$

Ecuaţia completă a mişcării este dată de formula (5.13) :

$$x = A \sin (\omega t + \varphi). \qquad (11.18)$$

constantele A şi φ determinîndu-se din condiţiile iniţiale.

Mişcările oscilatorii ocupă un loc important în tehnică ; astfel cuţitul unui strung, ciocanele de forjă, războaiele de ţesut mecanice, maşinile de cusut din industria pielăriei au mişcări oscilatorii ; de asemenea, o serie de fenomene elastice, optice, acustice sînt de natură oscilatorie.

Totodată oscilaţiile au aplicaţii într-o serie de domenii ale tehnicii noi. Astfel, *hidrolocaţia*, acea ştiinţă care se ocupă cu determinarea poziţiei corpurilor care se găsesc sub apă, are la bază aplicarea practică a oscilaţiilor ultrasonice. Măsurînd timpul în care o oscilaţie ultrasonică parcurge distanţa de la sursa care o emite pînă la obiectul aflat sub apă şi cunoscînd viteza ultrasunetelor se determină distanţa pînă la obiect.

O altă aplicaţie a oscilaţiilor în tehnica nouă a oscilaţiilor ultrasonice o constituie *defectoscopia ultrasonică*, procedeu descoperit de savantul soveietic S. I. Sokolov, cu ajutorul căruia se descoperă diferite goluri sau incluziuni într-o piesă.

Mişcarea punctului material studiată mai sus este o oscilaţie armonică avînd amplitudinea constantă, deci care poate dura un timp nelimitat ; o asemenea oscilaţie poartă numele de *oscilaţie liberă neamortizată*.

După cîte cunoaştem însă, fenomenele oscilatorii reale din natură au, din cauza frecării, amplitudini din ce în ce mai mici pînă cînd se opresc; astfel, o greutate atîrnată de un resort, un pendul lăsat liber să oscileze execută mişcări oscilatorii care după un timp oarecare se opresc. Asemenea mişcări oscilatorii poartă numele de *oscilaţii libere amortizate*.

Orice organ de maşină sau element de construcţie scos din poziţia de echilibru cu ajutorul unei forţe exterioare sau a unui impuls începe să oscileze, executînd o serie de oscilaţii libere amortizate. Aceste oscilaţii, care depind în forma, dimensiunile, elasticitatea şi legăturile piesei considerate, se numesc *oscilaţii proprii* sau *libere*. Asemenea oscilaţii proprii întîlnim de exemplu la o grindă, la un pendul, la un resort de care este atîrnată o greutate. Perioada T_p a acestor oscilaţii şi frecvenţa f_p sînt denumite respectiv *perioada proprie* şi *frecvenţa proprie*.

Dar corpurile mai pot avea şi altfel de oscilaţii, şi anume oscilaţii produse de o forţă exterioară care acţionează în mod

periodic asupra lor; astfel, batiul unui ciocan de forţă vibrează sub acţiunea loviturilor periodice ale ciocanului, un vapor vibrează datorită forţelor care-i sînt transmise de către piesele motorului său aflate în mişcare etc. Forţele exterioare sau impulsurile exterioare care fac ca un anumit corp să vibreze se numesc *forţe perturbatoare* sau *impulsuri perturbatoare* şi oscilaţiile produse de aceste forţe şi impulsuri se numesc *oscilaţii forţate.*

În momentul începerii oscilaţiilor forţate apar şi oscilaţiile proprii ale corpului, dar acestea se amortizează foarte repede din cauza frecărilor şi pînă la urmă corpul respectiv rămîne să vibreze numai sub acţiunea forţelor perturbatoare cu perioada T_f respectiv cu frecvenţa f_f.

În cazul corpurilor supuse la vibraţii forţate, datorită forţelor exterioare perturbatoare apare un fenomen de o deosebită importanţă tehnică, fenomenul de rezonanţă. Atît timp cît perioada oscilaţiilor forţate este diferită de perioada oscilaţiilor proprii ale corpului respectiv (mai mare sau mai mică), corpul oscilează cu amplitudini care depind de diferenţa acestor două perioade. În cazul în care perioada oscilaţiilor forţate devine egală cu perioada oscilaţiilor proprii apare *fenomenul de rezonanţă.* În acest caz amplitudinea oscilaţiilor creşte foarte mult şi piesa respectivă se rupe.

Cazuri frecvente de ruperi prin rezonanţă au avut loc la arborii aflaţi în mişcare de rotaţie, la fundaţiile maşinilor motoare, la poduri.

Menţionăm că fenomenul de rezonanţă are însă şi aplicaţii tehnice folositoare; astfel întreaga radiofonie se bazează pe rezonanţa care constă în coincidenţa perioadei de oscilaţie a circuitului oscilant de la aparatul de recepţie cu cea a oscilaţiei postului de emisie.

Pe lîngă aplicaţiile practice în diferite domenii ale tehnicii, oscilaţiile au uneori şi efecte vătămătoare asupra omului, maşinilor sau clădirilor.

Astfel ele pot provoca crăpături ale zidurilor sau tencuielilor, tasări ale fundaţiilor, zgomote, bătăi în lagăre, dereglări ale maşinilor sau aparatelor de măsură, scurtcircuite la maşinile electrice, deteriorări ale garniturilor conductelor etc.

Avînd în vedere aceste efecte, sarcina descoperirii şi izolării principalelor surse de oscilaţii apare ca o sarcină principală a tehnicienilor din întreprinderile care folosesc aparate şi maşini în care iau naştere procese oscilatorii.

Pentru muncitorii şi tehnicienii care lucrează în apropierea surselor de oscilaţii se prevăd o serie de măsuri, ca : micşorarea intensităţii vibraţiilor prin interpunerea unor pături elastice între maşini şi fundaţii, înlăturarea în cît mai largă măsură a surselor de vibraţii, folosirea de mijloace de protecţie speciale (costume, măşti de amortizare, ecrane de protecţie, izolaţii etc.).

Măsurile privind protecţia sănătăţii muncitorilor împotriva efectelor dăunătoare ale oscilaţiilor formează astăzi, la noi în ţară, o preocupare importantă a statului democrat-popular. În vederea acestui scop, în anii regimului democrat-popular s-a înfiinţat Institutul de cercetări ştiinţifice pentru protecţia muncii, unde se elaborează măsurile de protecţie împotriva vibraţiilor în cadrul unui plan general de protecţie a muncii.

f) **Mişcarea pendulului simplu**. Un punct material atîrnat de un punct fix prin intermediul unui fir perfect flexibil şi inextensibil formează un pendul simplu. Dacă-l depărtăm din poziţia sa verticală, în care el se află în repaus, pendulul oscilează de o parte şi de alta a acestei poziţii (fig. 11.5).

Pendulul simplu constituie deci un punct material supus la legături, avînd un singur grad de libertate (unghiul φ al firului cu verticala).

Datele şi necunoscutele acestei probleme de dinamică sînt cele din tabela 11.2.

Tabela 11.2

Date şi necunoscute la mişcarea pendulului simplu

Date	Forţe	mg
	Mărimi geometrice şi mecanice	m, l
	Condiţii iniţiale	$t=0 \begin{cases} \theta=\theta_0 \\ \dot{\theta}=0 \end{cases}$
Necunoscute	Mişcarea	$x=x(t)$ $y=y(t)$ sau $\theta=\theta(t)$ $(x^2+y^2=l^2)$
	Reacţiunile	$N=N(t)$

Pentru rezolvarea problemei, aplicăm ecuațiile (11.1):

$$ma_x = \Sigma F_x,$$
$$ma_y = \Sigma F_y. \quad (11.19)$$

Alegînd axele Ox, Oy ca în figura 11.5, ecuațiile de mișcare ale punctului M se scriu:

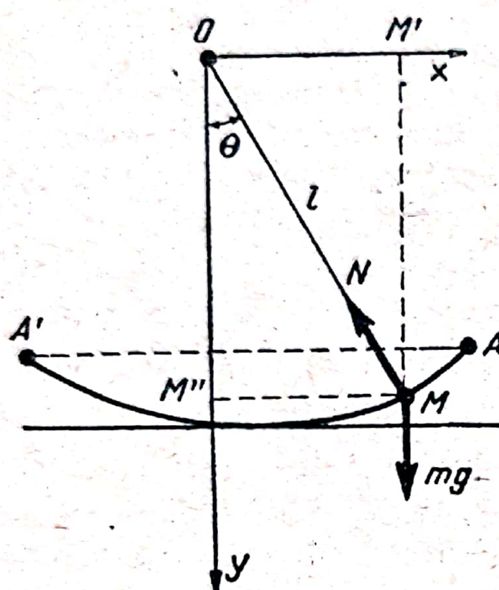


Fig. 11.5.

$$ma_x = -N \sin \theta,$$
$$ma_y = -N \cos \theta + mg. \quad (11.20)$$

Dar din triunghiul dreptunghic OMM' deducem:

$$\sin \theta = \frac{x}{l}, \quad \cos \theta = \frac{y}{l}. \quad (11.21)$$

Înlocuind în (11.20) obținem:

$$ma_x = -N \frac{x}{l} \quad (11.22)$$
$$ma_y = -N \frac{y}{l} + mg.$$

Să presupunem că studiem numai micile oscilații ale pendulului; în acest caz, unghiul θ este foarte mic și putem considera că punctul M are coordonata y aproximativ constantă. Aceasta revine la a înlocui traiectoria circulară AMA' a punctului cu o traiectorie rectilinie, coarda AA'.

Înlocuind în ecuațiile (11.22) $y \approx l$ obținem $a_y = 0$ și din cea de-a doua ecuație rezultă:

$$N = mg, \quad (11.23)$$

care înlocuită în prima ecuație (11.22) ne dă:

$$ma_x = -mg \frac{x}{l}; \qquad a_x = -\frac{g}{l} x = -kx, \quad (11.24)$$

k fiind o constantă. Comparînd între ele ecuațiile (11.24) și (5.15) deducem că mișcarea punctului M este o oscilație armonică pe dreapta AA', a cărei ecuație este:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (11.25)$$

Constantele A și φ se determină din condițiile inițiale.

Pulsaţia mişcării este :

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{11.26}$$

iar perioada mişcării este :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{11.27}$$

Aceasta reprezintă perioada micilor oscilaţii ale pendulului, cunoscută de la fizică.

Formulele (11.23) şi (11.25) conţin rezolvarea problemei, deoarece determină mişcarea şi reacţiunile.

g) **Mişcarea unui punct material pe un plan înclinat.** Să considerăm un punct material care se deplasează cu frecare pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală (fig. 11.6). Coeficientul de frecare dintre punct şi plan este μ. Se cere să se studieze mişcarea şi să se determine reacţiunea planului. Datele şi necunoscutele acestei probleme sînt arătate în tabela 11.3.

Pentru rezolvarea problemei aplicăm ecuaţiile (11.1) :

$$ma_x = \Sigma F_x,$$

$$ma_y = \Sigma F_y,$$

care în cazul problemei noastre devin :

$$ma_x = mg\,\sin\alpha - \mu N,$$
$$ma_y = N - mg\,\cos\alpha. \tag{11.28}$$

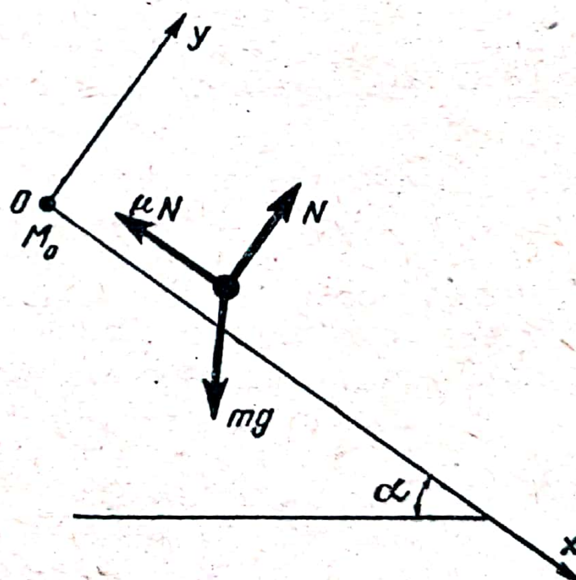


Fig. 11.6.

Deoarece punctul este supus la o legătură, coordonatele sale nu pot lua orice valori ; într-adevăr, din figura 11.6 se vede că punctul trebuie să rămînă în timpul mişcării în contact cu planul, adică pe axa Ox a sistemelor de axe ; aceasta revine la a spune că punctul nu poate avea nici viteză şi nici acceleraţie pe axa Oy :

$$v_y = a_y = 0.$$

Tabela 11.3

Date și necunoscute la mișcarea punctului material greu pe un plan înclinat

Date	Forțe	mg
	Mărimi geometrice și mecanice	$m;\ \mu$
	Condiții inițiale	$t=0 \begin{cases} x=0 & v_x=0 \\ y=0 & v_y=0 \end{cases}$
Necunoscute	Mișcarea	$x=x(t)$ $y=y(t)$
	Reacțiunile	$N=N(t)$

Înlocuind în (11.28) obținem:

$$ma_x = mg\ \sin\alpha - \mu N, \qquad (11.29)$$

$$0 = N - mg\ \cos\ \alpha.$$

Din cea de-a doua ecuație obținem valoarea reacțiunii:

$$N = mg\ \cos\ \alpha,$$

care înlocuită în prima ne dă:

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \text{const.}$$

Comparînd acest rezultat cu a doua formulă (5.4) deducem că mișcarea punctului pe planul înclinat este o mișcare uniform variată funcția $x = x(t)$ va avea forma:

$$x = At^2 + Bt + C, \qquad (11.30)$$

în care:

$$A = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

constantele B și C determinîndu-se din condițiile inițiale.

Astfel viteza punctului este:

$$v_x = 2At + B.$$

Înlocuind aci $t = 0$ și $v_x = 0$, obținem $B = 0$; dacă înlocuim și în (11.30) $t = 0$ și $x = 0$, obținem $C = 0$. Ecuația mișcării devine deci:

$$x = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2. \qquad (11.31)$$

2. Dinamica solidului rigid

Corpul solid rigid reprezintă, după cum am mai arătat, un sistem material mai complex decît punctul material, cu ajutorul căruia aproximăm corpurile reale din natură.

Ca şi în cazul punctului material, remarcăm faptul că studiul mişcării solidului rigid prezintă multe dificultăţi de natură matematică, a căror rezolvare nu este încă nici astăzi satisfăcătoare.

În cele ce urmează ne vom preocupa numai de acele mişcări ale solidului pentru care gradele de libertate variază conform cu cele trei tipuri de mişcări studiate în cinematică : mişcare uniformă, uniform variată şi oscilatorie armonică.

Ca metode de rezolvare a problemelor de dinamica solidului rigid pot fi folosite oricare dintre metodele studiate la capitolul *X*. În cele ce urmează, vom aplica numai principiul lui *d'* Alembert.

a) **Solidul rigid liber.** Ne propunem să studiem mişcarea unui solid rigid liber, adică nesupus nici unei legături. Un asemenea solid nu este supus acţiunii nici unei forţe de legătură (reacţiune a legăturii), putîndu-se deplasa nestingherit în orice direcţie în spaţiu ; solidul rigid liber are şase grade de libertate.

Singurele necunoscute din cazul mişcării solidului rigid liber sînt gradele sale de libertate ca funcţii de timp. În anumite probleme se poate cere însă determinarea uneia sau mai multor forţe care acţionează solidul, în scopul realizării unei anumite mişcări date.

Problemele de mişcarea solidului rigid liber au în general următoarea structură.

Date :

— forţe : toate forţele care acţionează solidul rigid într-o poziţie oarecare a sa la un moment oarecare t ;

— mărimi geometrice şi mecanice : masa, momentele de inerţie ale corpului, dimensiunile sale ;

— condiţii iniţiale : valorile parametrilor geometrici care-i caraterizează poziţia şi ale derivatelor acestor parametri la un moment $t = t_0$ cînd începe mişcarea.

Necunoscute :

— mişcarea solidului rigid, caracterizată prin parametrii geometrici care-i determină poziţia, ca funcţii de timp. O dată cunoscute valorile acestor parametri, se poate face un studiu

cinematic al mişcării solidului, determinînd căreia dintre mişcările studiate în cinematică îi aparţine mişcarea pe care o efectuează solidul considerat.

b) **Solidul rigid supus la legături**. Pentru a studia mişcarea solidului rigid supus la legături, vom îndepărta mai întîi legăturile introducînd în locul lor, aşa cum am procedat şi la statică, forţele de legătură. În urma acestei operaţii, solidul rigid devine liber şi i se pot aplica metodele de studiu indicate la capitolul X.

Legăturile din cazul mişcării solidului sînt aceleaşi ca la statică : simpla rezemare, prinderea cu fire şi bare, articulaţia şi încastrarea.

Datele şi necunoscutele sînt în general aceleaşi ca şi în cazul solidului rigid liber, cu deosebirea că în acest caz apar ca necunoscute şi vectorii reacţiuni ai legăturilor.

c) **Solid rigid aflat în mişcare de translaţie.** E x e m p l u : Un corp de formă prismatică avînd greutatea P se mişcă în

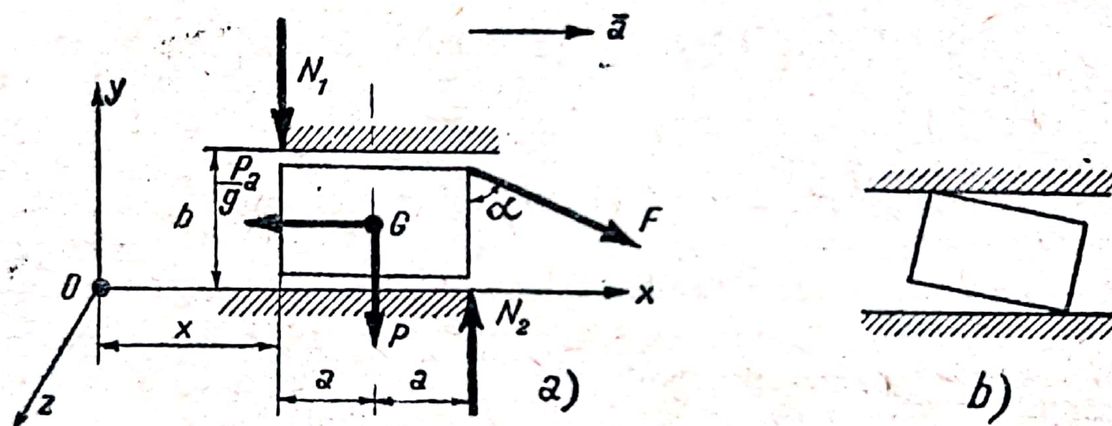


Fig. 11.7.

interiorul unui ghidaj rectiliniu (fig. 11.7, *a*) acţionat de o forţă F. Considerînd reazemele solidului fără frecare, se cere să se studieze mişcarea şi să se determine reacţiunile. Se dau : unghiul α de înclinare al forţei F şi distanţele a, b ; se vor neglija frecările.

Vom presupune că în timpul mişcării solidul se reazemă în două colţuri opuse, aşa cum se arată în figura 11.7, *b*. Alegem un sistem de axe $Oxyz$; mişcarea corpului este determinată numai prin coordonata x (corpul are un singur grad de libertate). Vom presupune că în momentul iniţial corpul pleacă fără viteză şi se află astfel încît muchia verticală din stînga coincide cu axa Oy. Datele şi necunoscutele acestei probleme sînt trecute în tabela 11.4.

Tabela 11.4

Date şi necunoscute într-o problemă de mişcarea de translaţie a solidului rigid

Date	Forţe	P, F, α*
	Date geometrice şi mecanice	a, b
	Condiţii iniţiale	la $t=0 \begin{cases} x=0 \\ v=0 \end{cases}$
Necunoscute	Mişcarea	$x=x(t)$
	Reacţiuni	N_1, N_2

Corpul avînd o mişcare de translaţie, îi vom aplica o singură forţă de inerţie opusă acceleraţiei a, care este presupusă ca fiind dirijată paralel cu axa ghidajului către dreapta.

Forţele care acţionează corpul formează un sistem de forţe coplanare; ecuaţiile de echilibru dinamic sînt:

$$-\frac{P}{g}a+F\sin\alpha=0,$$

$$N_2-N_1-P-F\cos\alpha=0, \qquad (11.32)$$

$$N_1a+N_2a-F\frac{b}{2}\sin\alpha-Fa\cos\alpha=0,$$

celelalte ecuaţii devenind identităţi.

Cu ajutorul acestor ecuaţii determinăm mişcarea şi reacţiunile. Din prima rezultă:

$$a=\frac{gF\sin\alpha}{P}=\text{const.} \qquad (11.33)$$

Deoarece acceleraţia este constantă, mişcarea este uniform variată [v. formula (5.10)]:

$$x=\frac{gF\sin\alpha}{P}\frac{t^2}{2}. \qquad (11.34)$$

---

*) Unghiul a fost trecut la forţe deoarece el caracterizează vectorul F.

Constantele B şi C din formula (11.34) sînt nule deoarece la $t = 0$, $x = 0$ şi $v = 0$.

Din celelalte două ecuaţii obţinem valorile reacţiunilor:

$$N_1 = \frac{P}{2} + F\cos\alpha + \frac{Fb\sin\alpha}{4a},$$
$$N_2 = \frac{Pb\sin\alpha}{4a} - \frac{P}{2}. \qquad (11.35)$$

Observăm că reacţiunile sînt constante.

d) **Mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe.** Foarte multe dintre organele mobile ale maşinilor (arbori drepţi şi cotiţi, şaibe, roţi dinţate, volanţi, scripeţi etc.) execută mişcări de rotaţie în jurul a diferite axe fixe.

În timpul acestei mişcări, solidul respectiv este acţionat de o serie de forţe şi cupluri care îl pun în mişcare sau care caută să-i accelereze mişcarea şi de o serie de forţe şi cupluri care se opun acestei mişcări sau care caută să-i încetinească mişcarea; primele se numesc *forţe şi cupluri motoare*, iar celelalte *forţe şi cupluri rezistenţe*. Primele provin de la motorul care antrenează axa corpului respectiv sau de la tensiunile motoare ale curelelor care acţionează corpul, iar celelalte de la maşina care este antrenată de axul respectiv sau de la tensiunile rezistente ale curelelor care acţionează corpul precum şi de la frecările din lagăre sau cu aerul. În afară de aceste forţe mai exista şi altele, cum ar fi de exemplu greutatea corpului respectiv împreună cu a altor corpuri solidare cu el.

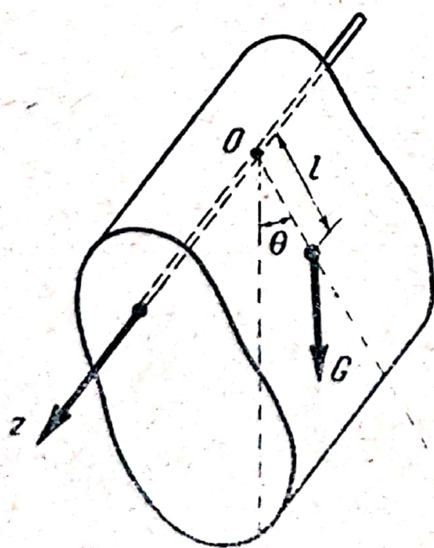


Fig. 11.8.

E x e m p l u. *Pendulul fizic.* Să considerăm un solid cu axă fixă care poate oscila in jurul unei axe fixe orizontale, aflat sub acţiunea unei singure forţe exterioare: greutatea proprie. Acest corp alcătuieşte ceea ce denumim un *pendul fizic* (fig. 11.8).

Să studiem mişcarea acestui corp care este un caz particular de solid cu axa fixă, adică să determinăm modul cum variază unghiul φ cu timpul.

Pentru aceasta, vom aplica numai ecuaţia de momente în raport cu axa de rotaţie. Momentul forţelor de inerţie în raport cu axa de rotaţie este:

$$M_z = J_z \varepsilon. \tag{11.36}$$

Deoarece reacţiunile din axă nu dau moment, singura forţă exterioară care dă moment în raport cu axa z este greutatea G; valoarea acestui moment este:

$$M_z = Gl \sin \theta \tag{11.37}$$

Am ales sensul pozitiv în sensul creşterii unghiului θ. Ecuaţia de echilibru dinamic este:

$$M_z + M_{iz} = 0 \tag{11.38}$$

sau

$$Gl \sin \theta + J_z \varepsilon = 0. \tag{11.39}$$

Presupunînd că unghiul θ este mic, putem pune $\sin \theta \approx \theta$ şi ecuaţia (11.39) devine:

$$J_z \varepsilon = - Gl\theta$$

sau:

$$\varepsilon = - \frac{Gl}{J_z}\theta = - C\theta, \tag{11.40}$$

C fiind o constantă. Comparînd ecuaţia (11.40) cu ecuaţia (5.15), deducem că mişcarea pendulului este o oscilaţie armonică de perioadă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Gl}} \tag{11.41}$$

Aceasta este perioada de oscilaţie a pendulului fizic.

Pendulul simplu care are aceeaşi perioadă ca pendulul fizic se numeşte pendul simplu sincron. Lungimea sa rezultă din egalarea relaţiilor (11.41) şi (11.27):

$$2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Gl}},$$

de unde:

$$l' = \frac{J_z}{Ml}, \tag{11.42}$$

M fiind masa pendulului fizic.

Capitolul XII

CIOCNIRI

1. Fenomenul ciocnirii și aplicațiile sale în tehnică

În toate capitolele studiate pînă aci am presupus că vectorul viteză al unui punct aparținînd unui solid rigid se schimbă în mod continuu, fără salturi bruște.

În natură constatăm că există însă fenomene la care vitezele punctelor unui solid se schimbă brusc, aproape instantaneu; asemenea fenomene poartă denumirea de *ciocniri*.

Fenomenul ciocnirii are multe aplicații în tehnică: astfel operațiile de prelucrare a metalelor: forjarea, ștanțarea, alte operații ca nituirea, baterea cuielor, cuplarea bruscă a doi arbori, angrenarea bruscă a două roți dințate ș.a. sînt aplicații ale fenomenului de ciocnire.

2. Punerea problemei în cazul ciocnirii a două corpuri materiale

Aspectul general al problemelor de ciocnire a două corpuri materiale este următorul:

Date:

— caracteristicile geometrice (forma și dimensiunile) și mecanice ale corpurilor care se ciocnesc;

— distribuția de viteză înainte de ciocnire pentru fiecare dintre cele două corpuri:

— modul în care se efectuează ciocnirea.

Necunoscute:

— distribuția de viteze după ciocnire pentru fiecare dintre cele două corpuri.

3. Ciocnirea centrică a două bile

Să considerăm două bile sferice avînd masele m_1 și m_2 și vitezele v_1 și v_2 ale centrelor îndreptate în lungul liniei O_1O_2; ele se ciocnesc după linia centrelor, căpătînd după ciocnire vitezele v_1' și v_2'. O asemenea ciocnire este denumită ciocnire centrică. Se cere să se determine vitezele v_1' și v_2' (fig. 12.1).

Pentru aceasta, să considerăm sistemul format de cele două bile; cum forța care ia naștere în momentul ciocnirii este interioară sistemului format de ele (ea se exercită numai între cele două bile fără intervenția altui corp din afară), după cum am

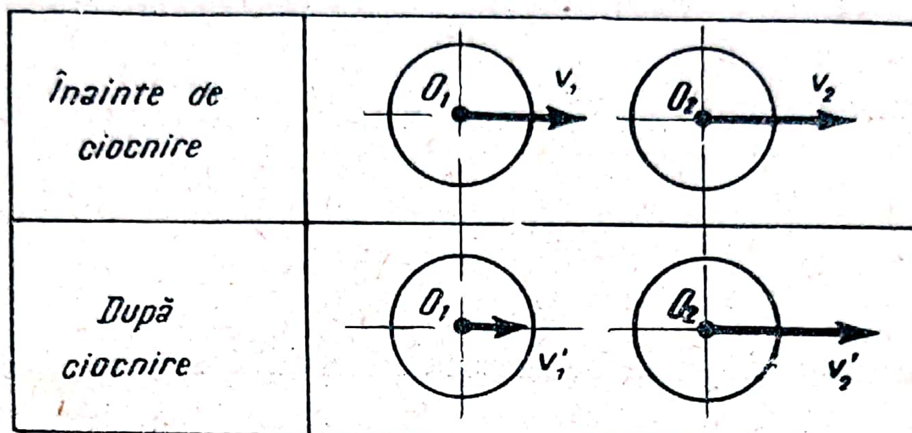


Fig. 12.1.

văzut impulsul sistemului se conservă, adică suma impulsurilor celor două bile înainte de ciocnire este egală cu suma impulsurilor celor două bile după ciocnire:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{12.1}$$

Am obținut numai o singură ecuație pentru determinarea vitezelor v'_1 și v_2'; s-ar părea prin aceasta că fenomenul este nedeterminat, fapt care nu concordă cu realitatea. Eroarea provine din aceea că am considerat cele două corpuri ca nedeformabile. Dacă vom renunța în acest caz la ipoteza solidului rigid și vom considera cele două corpuri ca deformabile, vom observa că fenomenul de ciocnire se petrece în două faze: *o fază de comprimare*, cînd centrele celor două sfere se apropie pînă în momentul egalizării vitezelor lor, și o *fază de relaxare*, cînd viteza primei sfere scade, iar a celei de-a doua crește. O mărime importantă la începutul și la sfîrșitul ciocnirii o constituie viteza relativă a celor două sfere. Într-adevăr, după cum se știe din practică, ceea ce este important în ciocnirea a două corpuri aflate în mișcare este viteza lor relativă și nu vitezele absolute ale fiecărui corp în parte. Să presupunem că vitezele înainte de ciocnire și după ciocnire stau în relațiile:

$$v_1 > v_2, \quad v_2' > v_1'.$$

În acest caz, vitezele relative ale celor două bile înainte de începerea fenomenului de ciocnire şi imediat după terminarea lui sînt :

$$v_r = v_1 - v_2, \quad v'_r = v'_2 - v'_1, \tag{12.2}$$

Raportul acestor două viteze relative îl vom denumi *coeficient de restituire* sau *coeficient de elasticitate la ciocnire* :

$$k = \frac{v'_r}{v_r} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}. \tag{12.3}$$

Coeficientul k depinde de natura materialelor celor două corpuri.

Pentru $k = 1$, vitezele relative înainte şi după ciocnire sînt egale; acesta este cazul denumit ciocnire elastică.

Pentru $k = 0$, $v'_r = 0$, nu mai există mişcare relativă între cele două sfere după ciocnire; ele pleacă împreună. Acesta este cazul denumit *ciocnire plastică*. În cazul unei ciocniri reale, $0 < k < 1$, adică $v'_r < v_r$. Acesta este cazul ciocnirii corpurilor din natură. Printre acestea există corpuri confecţionate din materiale al căror coeficient de restituire la ciocnire se apropie mai mult de ciocnirea elastică (de exemplu fildeşul, oţelul) sau de ciocnirea plastică (argila, ceara, plastilina etc.).

Cunoscînd valoarea coeficientului k, relaţia (12.3) devine o a doua ecuaţie pentru determinarea vitezelor v'_1 şi v'_2. Rezolvînd sistemul acestor ecuaţii, obţinem :

$$v'_1 = v_1 - \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \quad v'_2 = v_2 + \frac{(v_1 - v_2)(1 + k)}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \tag{12.4}$$

Cu aceasta, problema ciocnirii a două bile este rezolvată.

Din formulele (12.4) se vede că, deoarece $v_1 > v_2$, prin ciocnire viteza bilei cu viteză mare (bila 1) se micşorează, întrucît $v'_1 < v_1$, iar viteza bilei cu viteză mică (bila 2) creşte întrucît $v'_2 > v_2$.

4. Pierderea de energie în cazul ciocnirii

Sistemul celor două bile are o energie E_1 înainte de ciocnire şi o energie E_2 după ciocnire; expresiile lui E_1 şi E_2 sînt, după formulele cunoscute:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \qquad (12.5)$$
$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Să notăm prin ΔE diferenţa energiilor la începutul şi la sfîrşitul ciocnirii ($E_1 > E_2$, deoarece după ciocnire s-a pierdut o parte din energia totală):

$$\Delta E = E_1 - E_2.$$

Aceasta o vom denumi *pierdere de energie la ciocnire*. Dacă înlocuim în expresia E_2 valorile lui v_1' şi v_2' date de relaţiile (12.4) şi efectuăm calculele, obţinem:

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{a(m_1 + m_2)} (1-k^2)\ (v_1-v_2)^2. \qquad (12.6)$$

Se constată că în cazul ciocnirii elastice ($k = 1$) obţinem $\Delta E = 0$, adică nu avem pierdere de energie; pierderea maximă de energie o avem în cazul ciocnirii plastice ($k=0$), şi anume:

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1-v_2)^2 \qquad (12.7)$$

Această energie pierdută o regăsim în alte forme de energii: energia de deformare a corpurilor, energia calorică, luminoasă etc.

5. Ciocnirea centrică a unei bile cu un perete fix

Să presupunem că cel de-al doilea corp (corpul lovit) este în loc de o bilă un perete fix (fig. 12.2). În acest caz, vom putea găsi viteza bilei după ciocnire înlocuind în formulele (12.4)

$v'_2 = v_2 = 0$ (peretele este fix și înainte și după ciocnire) și $m_2 = \infty$ (peretele fix este solidar cu Pămîntul, care are o masă mai mare decît a bilei care lovește).

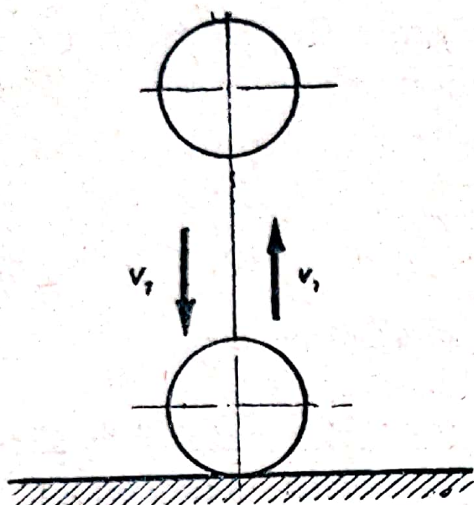


Fig. 12.2.

Vom obține din prima formulă :

$$v'_1 = -kv_1, \qquad (12.8)$$

adică bila se întoarce cu o viteză de k ori mai mică decît cea pe care a avut-o . Acesta este spre exemplu cazul unei mingi care se lovește de podea, ridicîndu-se din ce în ce la o înălțime mai mică.

6. Ciocnirea unei sfere cu un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe; centrul de ciocnire

Și în acest caz, problema se pune la fel ca la ciocnirea centrală a două bile : bila lovește corpul într-un plan perpendicular pe axă, după normala comună în punctul de contact ; cunoscînd vitezele bilei și corpului înainte de ciocnire, se cer vitezele lor după ciocnire. Nu vom studia acest caz, ci vom remarca doar că el este un caz de ciocnire la care unul dintre corpuri este supus la legături; datorită acestui fapt, în timpul ciocnirii va lua naștere în general o percusiune de legătură, care se pune în evidență în mod practic printr-o ,,smucitură,, a legăturii. Pentru unele aplicații practice este important de știut cum trebuie lovit un asemenea corp astfel încît axa de care este suspendat să nu sufere acéste smucituri. Se poate demonstra că axa nu suferă smucituri atunci cînd corpul este lovit perpendicular pe planul format de axa de rotație și centrul de greutate al corpului într-un punct P denumit *centru de ciocnire*. Distanța

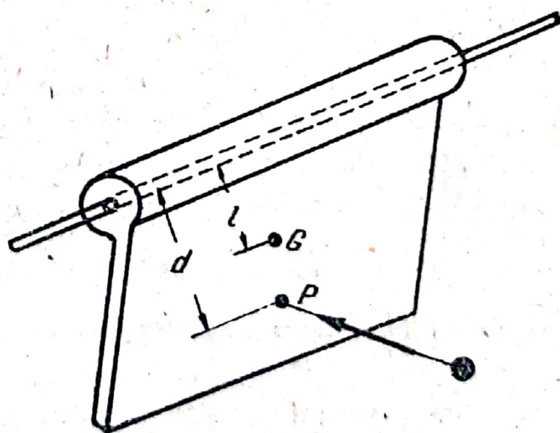


Fig. 12.3.

acestui punct la axa de rotaţie este egală cu lungimea pendului simplu (fig. 12.3) sincron :

$$d = \frac{I\Delta}{Ml} \tag{12.9}$$

($I\Delta$ momentul de inerţie al corpului în raport cu axa de rotaţie, M masa corpului, l distanţa centrului de greutate la axa de rotaţie).

7. Aplicaţiile tehnice ale fenomenului de ciocnire

a) **Baterea cuielor cu ciocanul sau a unui pilot cu berbecul** poate fi asimilată ciocnirii plastice a două bile, din care cea de-a doua este în repaus în momentul ciocnirii ($k = 0$, $v_2 = 0$) (fig. 12.4). În acest caz, dacă raportăm pierderea de energie calculată cu formula (12.6) la energia iniţială a cărei expresie este :

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

obţinem procentul de energie pierdută din energia iniţială :

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \tag{12.10}$$

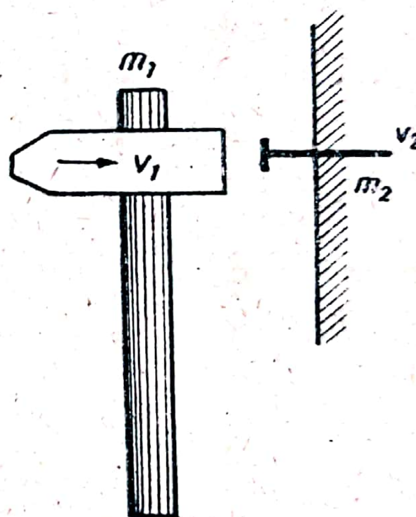


Fig. 12.4.

Cum în exemplele de mai sus avem interesul ca prin ciocnire să producem mişcare, va trebui ca acest raport să fie cît mai mic; pentru aceasta, trebuie ca masa m_1 a ciocanului sau berbecului să fie mult mai mare decît cea a cuiului respectiv a pilotului bătut.

b) **Prelucrarea prin ciocnire**. În acest caz intră operaţiile de îndreptare, îndoire, nituire realizate cu variaţii bruşte de viteză (ciocniri), la care avem interesul ca să se piardă cît mai multă energie în timpul ciocnirii pentru deformarea corpului respectiv (fig. 12.5).

Asimilînd şi această situaţie cu ciocnirea plastică a două bile, obţinem că raportul m_1/m_2 trebuie să fie mic, adică corpul de prelucrat trebuie să aibă o masă mare. Din acest motiv,

Br. 2—54

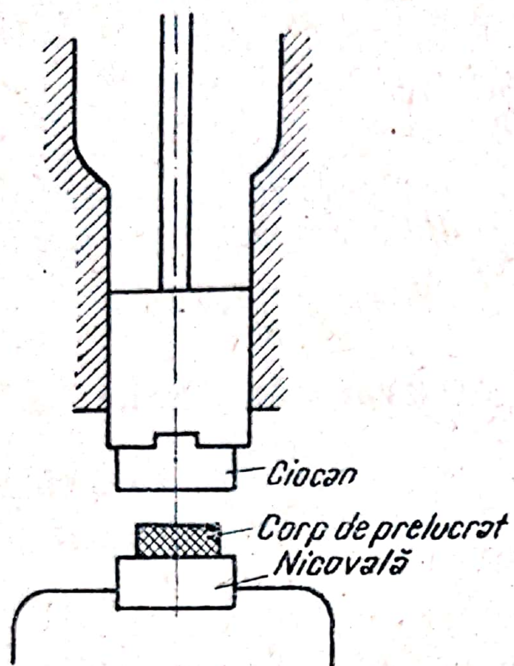


Fig. 12.5.

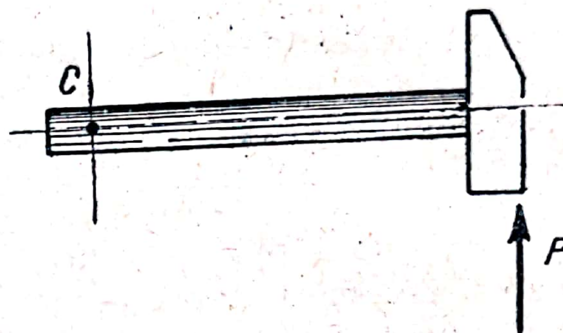


Fig. 12.6.

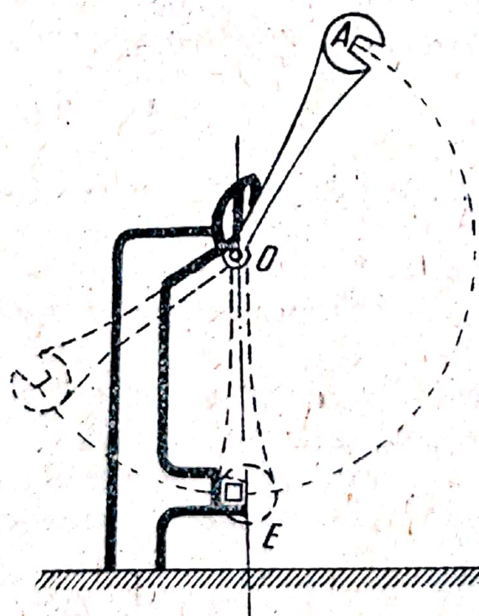


Fig. 12.7.



Fig. 12.8.

masa corpului de prelucrat este mărită prin aşezarea sa pe o nicovală (de exemplu în cazul forjării) sau pe contrabuterolă în cazul nituirii.

Dacă ciocnirile din cazul de mai sus nu sînt plastice, raportul η are valoarea :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} (1 - k^2). \tag{12.11}$$

c) **Determinarea centrului de ciocnire la diferite scule şi piese.** În foarte multe domenii din tehnică se cere ca axa de rotaţie a unei piese care suferă ciocniri să fie astfel aşezată încît să nu se producă smucituri în această axă. Astfel, pentru a obţine un bun randament în muncă ciocanul nu trebuie să obosească în mod inutil pe muncitor prin producerea de ciocniri în mînă. Făcînd coada de o lungime corespunzătoare şi alegînd poziţia în care este ţinut astfel încît punctul C să fie centrul de ciocnire, se evită smuciturile mîinii (fig. 12.6).

Pentru a evita smuciturile axei pendulului pentru măsurarea rezilienţei (capacitatea de a rezista la şoc) a diferitelor materiale, pendulul este astfel construit încît punctul unde loveşte materialul este centrul său de ciocnire (fig. 12.7). Pentru a nu avea percuţii în axa vătalei războiului de ţesut, trebuie ca distanţa dintre axa vătalei şi gura ţesăturii să fie egală cu lungimea pendulului echivalent, adică gura ţesăturii trebuie să se afle în centrul de ciocnire. Acest lucru se realizează în anumite cazuri prin adăugarea unor mase suplimentare m (fig. 12.8).

Capitolul XIII

NOŢIUNI ELEMENTARE DE DINAMICA MAŞINILOR

1. Noţiunea de maşină

În general, vom înţelege prin maşină un ansamblu de mecanisme destinat executării unor mişcări determinate, în scopul realizării unui lucru mecanic util sau al transformării unei energii mecanice.

Orice maşină sau agregat de maşini se compune în mare din trei părţi esenţiale: *mecanismul motor* sau motorul, care furnizează energia necesară funcţionării maşinii, *mecanismul de transmisie*, care transmite mişcarea la mecanismul de execuţie, avînd în general posibilitatea de a varia caracteristicile cinematice şi dinamice ale mişcării transmise, şi *mecanismul de execuţie* sau maşina de lucru, avînd scopul de a efectua lucrul util cerut de procesul tehnologic pe care trebuie să-l îndeplinească maşina sau agregatul respectiv.

Construirea societăţii noi, socialiste este de neconceput fără un înalt grad de mecanizare a tuturor proceselor productive din toate ramurile de activitate ale industriei, agriculturii, transporturilor. Acest înalt grad de mecanizare nu este pus în slujba stoarcerii de profituri cît mai mari şi al exploatării capitaliste, ci în scopul eliberării din ce în ce a omului de munca fizică, al creării bunăstării şi fericirii omului, într-o societate eliberată de orice exploatare. Prin prisma acestor consideraţii trebuie privite recentele hotărîri de partid şi de stat privind introducerea tehnicii celei mai noi, mecanizarea şi automatizarea din ce în ce mai adîncită a proceselor productive.

În cele ce urmează vom analiza pe scurt cele mai importante caracteristici ale unei maşini, din punct de vedere mecanic, caracteristici de bază care trebuie cunoscute de orice tehnician chemat să conducă sau să mînuiască cu competenţă maşini din ce în ce mai perfecţionate, care constituie astăzi la noi în ţară un bun al întregului popor. Studiul lor va fi reluat şi adîncit în cadrul disciplinelor de specialitate.

2. Forţele care acţionează asupra unei maşini

În timpul funcţionării unei maşini, asupra organelor sale acţionează următoarele forţe:

— forţe motoare,
— forţe rezistente utile,
— forţe rezistente pasive (frecări),
— greutăţi ale organelor de maşini,
— reacţiunile din legăturile existente între elemente.

Aceste forţe pot fi constante sau variabile în raport cu poziţia sau viteza organului asupra căruia ele acţionează.

3. Echilibrarea forţelor de inerţie

O categorie importantă de forţe o constituie forţele de inerţie, care pot atinge valori importante datorită acceleraţiilor mari la care sînt supuse unele organe ale maşinii. Aceste forţe

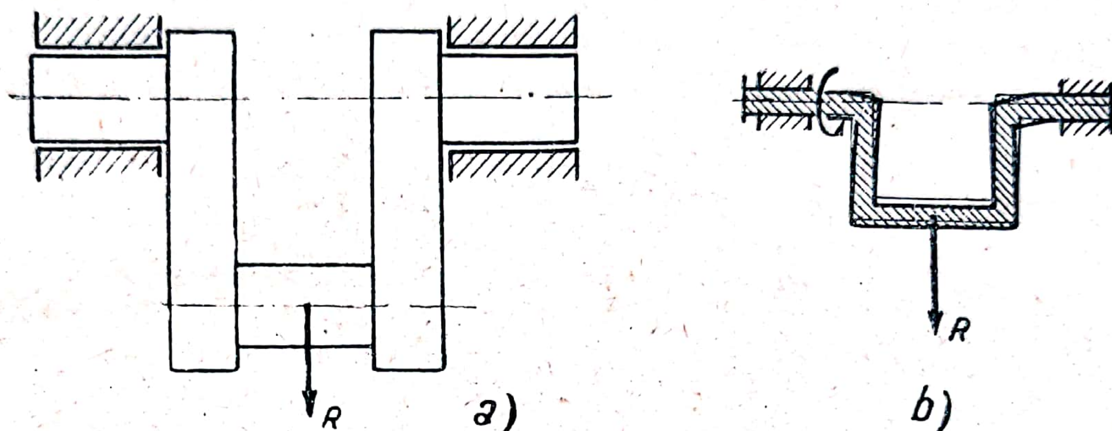


Fig. 13.1.

de inerţie produc solicitări foarte mari în legăturile maşinii şi vibraţii, de aceea se caută pe cît este posibil ca efectul lor să fie compensat prin montarea unor mase adiţionale; operaţia de îndepărtare a efectelor dăunătoare ale forţelor şi momentelor forţelor de inerţie care acţionează un organ de maşină se numeşte *echilibrarea forţelor de inerţie*.

Astfel, în cazul mişcării arborelui cotit din figura 13.1, *a* forţele de inerţie centrifuge dau o rezultantă *R*, avînd drept efect reacţiuni suplimentare mari în lagăre, producerea de vibraţii precum şi deformarea arborelui (fig. 13.1, *b*). În cazul arborelui din figura 13.2, ele se reduc la un cuplu avînd în

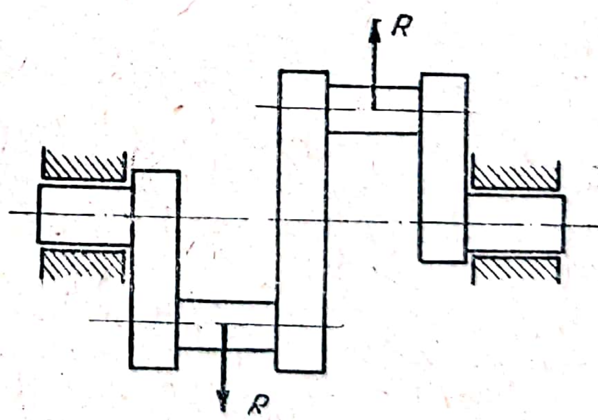


Fig. 13.2.

general aceleaşi efecte. Pentru echilibrarea forţelor de inerţie din primul caz se folosesc două mase adiţionale aşezate ca în

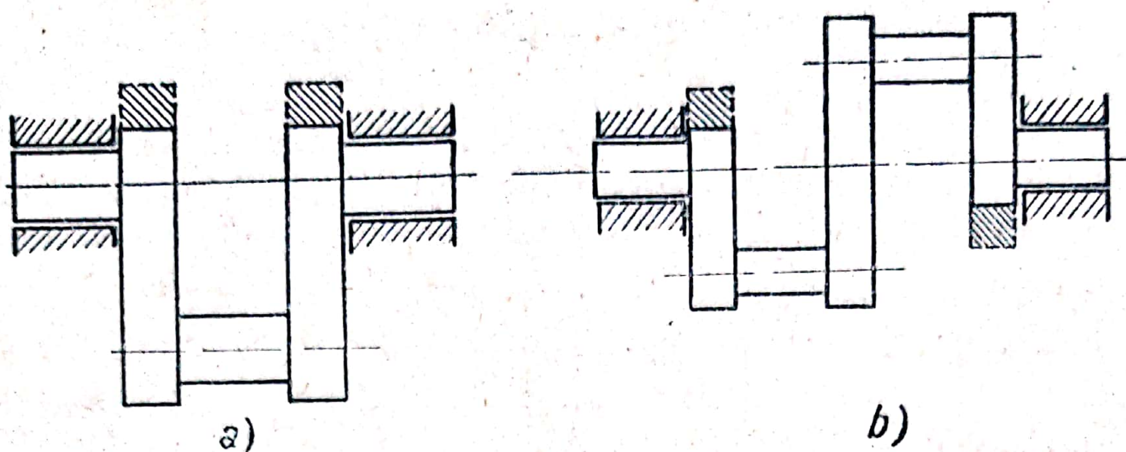


Fig. 13.3.

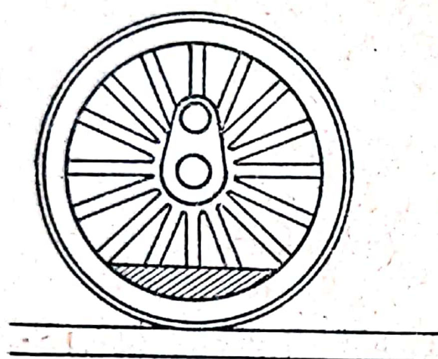


Fig. 13.4.

figura 13.3, *a* iar pentru echilibrarea cuplului de inerţie din cel de-al doilea caz se folosesc două mase adiţionale dispuse ca în figura 13.3, *b*.

În acelaşi scop se montează şi contragreutatea din partea opusă manetonului de acţionare al roţii motoare a unei locomotive (fig. 13.4).

4. Funcţionarea unei maşini

a) **Fazele mişcării unei maşini; tahograma mişcării; viteza medie; coeficient de neregularitate.** Din momentul pornirii unei maşini pînă în momentul opririi, ea parcurge în general următoarele trei faze:

— *faza de pornire* (demarajul); în această fază vitezele tuturor organelor mobile ale maşinii cresc incontinuu pînă la o anumită valoare, care reprezintă începutul fazei următoare;

— *faza de regim*; în această fază vitezele organelor mobile ale maşinii se consideră constante; în realitate însă, vitezele diferitelor organe mobile ale maşinii oscilează în jurul unei valori medii care reprezintă viteza de regim a maşinii respective;

— *faza de oprire*; în această fază se petrece un proces invers celui care se petrece în faza de pornire: vitezele tuturor organelor mobile ale maşinii descresc pînă la valoarea zero.

Să presupunem că maşina respectivă este antrenată de un motor; diagrama de variaţie a vitezei unghiulare a arborelui principal pe toată durata celor trei faze se numeşte *tahograma* maşinii respective. Timpul total de funcţionare a maşinii T este suma timpurilor duratei de pornire (t_p), duratei de regim (t_r) şi duratei de oprire (t_o):

$$T = t_p + t_r + t_o.$$

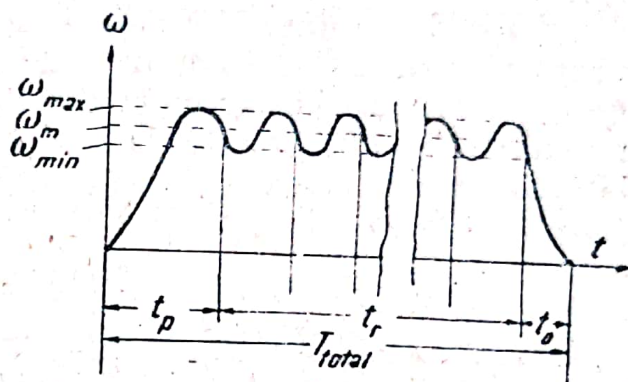


Fig. 13.5.

Din această diagramă (fig. 13.5) se vede că mişcarea de regim este o mişcare periodică; viteza unghiulară a arborelui principal variază între două valori: maximă (ω_{max}) şi minimă (ω_{min}), astfel încît viteza unghiulară medie a acestui arbore este:

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \tag{13.1}$$

Mărimea δ dată de relaţia:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} \tag{13.2}$$

se numeşte *gradul de neregularitate* al maşinii. Intervalul de variaţie al gradului de neregularitate pentru diferite maşini este dat în tabele; iată cîteva valori:

generatori electrici . . . . $\delta = 0{,}003 \ldots 0{,}006$
maşini-unelte . . . . $\delta = 0{,}025 \ldots 0{,}03$
prese, foarfece mecanice . . . . $\delta = 0{,}10 \ldots 0{,}20.$

b) **Bilanţul energetic al maşinii.** Să aplicăm teorema energiei cinetice între momentele t_1 şi t_2; pentru aceasta vom nota:

E_1 energia cinetică la momentul t_1,
E_2 energia cinetică la momentul t_2,
L_m lucrul mecanic motor,
L_u lucrul mecanic util,
L_p lucrul mecanic al rezistenţelor pasive.

După cele cunoscute din dinamică, teorema energiei cinetice în intervalul de timp considerat se scrie :

$$E_2 - E_1 = L_m - L_u - L_p. \tag{13.3}$$

Să aplicăm acum această ecuaţie pentru toate cele trei faze ale maşinii.

Faza de pornire. Vom alege intervalul de timp $0 - t_p$, adică vom aplica ecuaţia (13.3) pentru $t_1 = 0$ şi $t_2 = t_p$. În acest caz vom avea $E_2 \neq 0$, deoarece la $t_2 = t_p$ maşina a ajuns la viteza de regim, şi $E_1 = 0$ deoarece la $t_1 = 0$ toate vitezele organelor mobile ale maşinii erau nule. Rezultă :

$$E_2 = L_m - L_u - L_p. \tag{13.4}$$

Diferenţa de lucru mecanic $L_m - (L_u + L_p)$ produce creşterea vitezelor organelor mobile ale maşinii. Dacă este posibil, pentru aducerea şi mai rapidă a maşinii la faza de regim, această diferenţă este făcută şi mai mare prin anularea termenului L_u, adică prin ceea ce se numeşte pornire în gol a maşinii respective. În acest caz avem :

$$E_2 = L_m - L_p. \tag{13.5}$$

Asemenea exemple de pornire în gol avem în cazul motorului unui automobil sau al unui laminor.

Faza de regim. Vom alege acum intervalul de timp $t_p - t_r$, adică vom aplica ecuaţia (13.3) pentru $t_1 = t_p$ şi $t_2 = t_r$.

În acest caz, vitezele organelor mobile ale maşinii fiind aceleaşi şi pentru valoarea $t_1 = t_p$ şi pentru $t_2 = t_r$, vom avea $E_1 = E_2$; valoarea comună a energiei este egală cu energia cinetică a maşinii de la sfîrşitul fazei precedente ; ecuaţia (13.3) devine deci :

$$L_m - L_u - L_p = 0$$

sau

$$L_m = L_u + L_p, \tag{13.6}$$

adică în timpul funcţionării de regim al unei maşini, lucrul mecanic motor se consumă în întregime în lucru mecanic util şi pasiv, nemaiavînd loc nici o creştere de energie a organelor mobile. Cu toate acestea, în timpul acestei faze au totuşi loc variaţii de energie datorită fluctuaţiilor vitezelor ; de aceea, concluzia de mai sus trebuie considerată ca valabilă pe durata unui ciclu de funcţionare şi nu în fiecare moment.

Faza de oprire. Se alege intervalul de timp $t_r - t_o$, adică se aplică ecuația (13.3) pentru $t_1 - t_r$ și $t_2 = t_o$. Deoarece pentru $t_2 = t_o$ mașina se oprește, vom avea $E_2 = 0$. Energia cinetică E_1 a mașinii la momentul $t_1 = t_r$ este egală cu energia cinetică din timpul fazei precedente. În această perioadă se întrerupe furnizarea de lucru mecanic motor ($L_m = 0$), iar lucrul mecanic al rezistențelor pasive este mărit foarte mult valoarea $L_p' \gg L_p$ cu ajutorul unor dispozitive speciale, denumite frîne. Înlocuind în ecuația (13.3) obținem:

$$0 - E_1 = - L_u - L_p'$$

sau

$$E_1 = L_u + L_p', \tag{13.7}$$

adică întreaga energie cinetică a mașinii este consumată în lucrul mecanic util și în lucrul mecanic al rezistențelor pasive ale mașinii și al organelor de frînare.

c) **Randamentul mecanic al mașinii** se calculează numai pentru faza de regim; el are valoarea:

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = 1 - \frac{L_p}{L_m}. \tag{13.8}$$

5. Reglarea mersului unei mașini; volanți, regulatori, frîne

a) **Variațiile vitezelor organelor mobile ale mașinilor.** După cum am arătat în tahograma din figura 13.5, vitezele unghiulare ale organelor mobile ale unui mașini nu sînt în general constante ci suferă anumite variații. Aceste variații sînt de două feluri:

— *variații periodice*, în urma cărora viteza organului de mașină mobil considerat se schimbă oscilînd însă în jurul unei valori medii, și

— *variații neperiodice*, în urma cărora viteza organului de mașină mobil considerat fie crește continuu, fie scade continuu, pînă devine zero.

În diagrama din figura 13.5 se vede că asemenea variații au loc în tot timpul funcționării mașinii; astfel, în prima și ultima fază au loc variații neperiodice, iar în faza de regim au loc variații periodice. Dintr-o defecțiune oarecare, se poate întîmpla însă ca și în timpul fazei de regim să apară variații ne-

periodice ; astfel, la o creştere sau o scădere bruscă a sarcinii, maşina îşi încetineşte viteza pînă la oprire sau se ambalează pînă la distrugere. După cîte este cunoscut din practică, atît variaţiile periodice cît şi cele neperiodice sînt în general nedorite şi se caută să fie atenuate prin diverse dispozitive suplimentare, denumite *dispozitive de reglaj* ; ele vor fi descrise în cele ce urmează.

b) **Dispozitive pentru atenuarea variaţiilor periodice ; volantul.** Din ecuaţia (13.6) rezultă că pentru ca energia cinetică a maşinii în timpul perioadei de regim să fie riguros constantă trebuie ca :

$$L_m = L_u + L_p.$$

În general este însă foarte greu de menţinut această egalitate ; de aceea, la un moment dat avem fie :

$$L_m > L_u + L_p, \tag{13.9}$$

fie :

$$L_m < L_u + L_p. \tag{13.10}$$

În primul caz maşina se ambalează datorită excesului de lucru mecanic motor, iar în cel de-a doilea ea îşi micşorează viteza provocînd fluctuaţiile periodice despre care am vorbit mai sus. Micşorarea intervalului de variaţie al vitezelor organelor mobile ale maşinii se face cu un dispozitiv denumit *volant*. Volantul este o roată grea fixată pe arborele principal al maşinii, avînd un moment de inerţie mare în raport cu axa de rotaţie. Volantul lucrează ca un acumulator de energie înmagazinînd energie cînd mişcarea se accelerează, pe care o restituie apoi cînd mişcarea se încetineşte. Volantul prezintă însă dezavantajul că îngreunează totodată atît pornirea cît şi oprirea maşinii.

Momentul de inerţie al volantului în raport cu axa de rotaţie se determină prin calcul, astfel încît să obţinem pentru coeficientul de neregularitate valoarea prescrisă în funcţie de felul şi destinaţia maşinii respective.

Să considerăm un ciclu de funcţionare al maşinii cînd viteza unghiulară a arborelui principal pe care este montat volantul variază între limitele ω_{min} şi ω_{max} şi să notăm cu I momentul de inerţie al volantului (neglijînd momentul de inerţie la celorlalte piese) şi cu L diferenţa lucrurilor mecanice $L_m - (L_u + L_p)$ în intervalul acestui ciclu. Aplicînd teorema energiei cinetice avem :

$$\frac{1}{2} J\omega^2_{max} - \frac{1}{2} I\omega_{min} = L, \tag{13.11}$$

de unde:

$$I = \frac{2L}{\omega^2_{max} - \omega^2_{min}} = \frac{2L}{(\omega_{max} - \omega_{min})\ (\omega_{max} + \omega_{min})}\ . \qquad (13.12)$$

Dar din formulele (13.1) şi (13.2) deducem:

$$\omega_{max} - \omega_{min} = 2\delta\omega_m,$$

$$\omega_{max} + \omega_{min} = 2\,\omega_m,$$

cu care obţinem:

$$I = \frac{L}{\omega^2_m\,\delta}\ . \qquad (13.13)$$

c) **Dispozitive pentru prevenirea variaţiilor neperiodice; regulatori.** În cazul în care din anumite cauze variaţia mişcării maşinii nu este periodică, maşina se poate opri sau ambala, iar volantul nu poate preveni această situaţie ci numai s-o atenueze. Cu alte cuvinte, volantul nu poate servi la menţinerea unei stări de regim; pentru aceasta se întrebuinţează alte dispozitive, denumite *regulatori*. Regulatorii sînt dispozitive care menţin starea de regim a unei maşini prin acţiune automată directă asupra forţei motoare pe care o micşorează cînd vitezele cresc şi o măresc cînd vitezele descresc.

Cele mai răspîndite regulatoare întîlnite în practică sînt regulatoarele centrifugale (care acţionează pe baza forţei centrifuge) şi care pot fi cu acţiunea directă asupra agentului motor sau cu acţiunea indirectă, cînd acţionează prin intermediul unui servo-motor. O schemă simplificată de reglaj cu servomecanism este

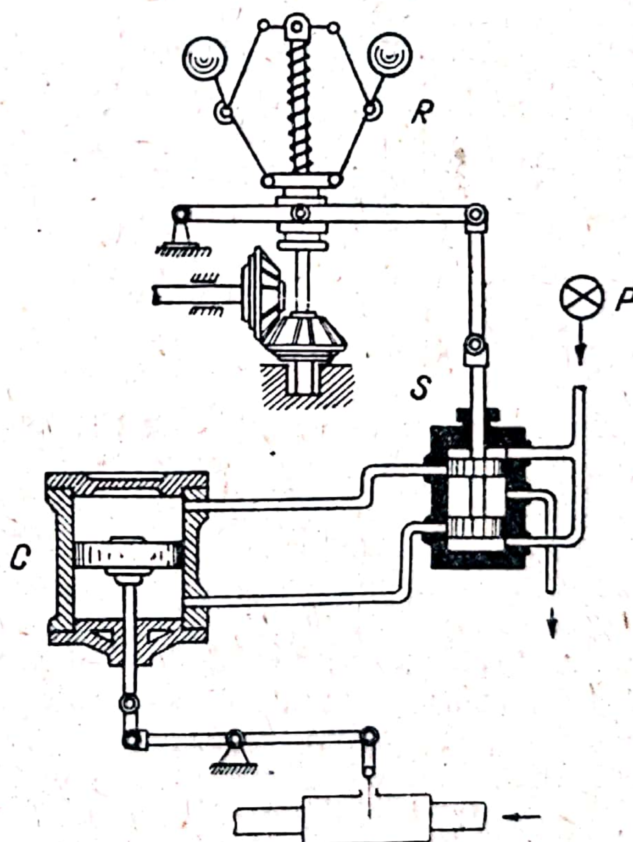


Fig. 13.6.

arătată în figura 13.6. Regulatorul R transmite variațiile sale servomecanismului S, alimentat de la o pompă de ulei P; acesta, la rîndul său, transmite variațiile de presiune cilindrului C (care este solidar cu ventilul de reglaj) de alimentare a unei turbine, pe care-l închide sau îl deschide, după cum îi comandă regulatorul R.

Vom descrie în cele ce urmează două tipuri de regulatoare care sînt cele mai răspîndite.

Regulatorul Watt. În figura 13.7 este arătată schema acestui regulator. El se compune dintr-un arbore vertical Oy, care primește mișcarea de rotație cu viteza unghiulară ω de la arborele conducător al mașinii, care se rotește cu viteza unghiulară ω_1

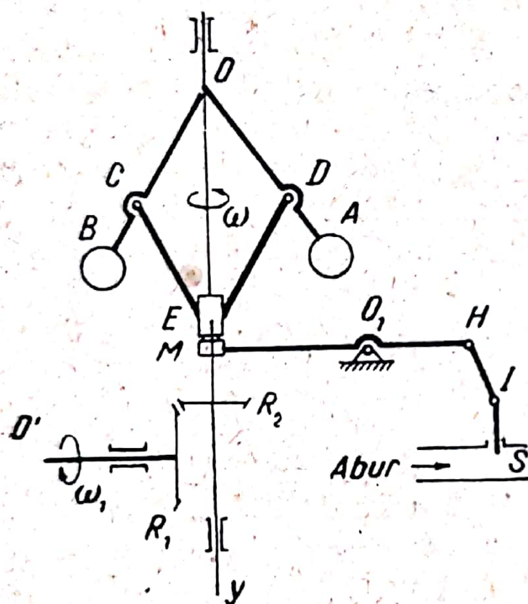


Fig. 13.7.

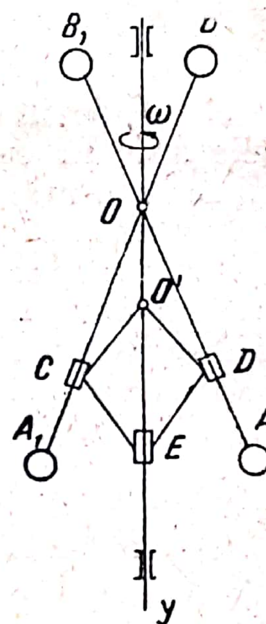


Fig. 13.8.

prin intermediul unui angrenaj conic compus din roțile R_1 și R_2. De arborele Oy sînt articulate barele egale OA și OB la extremitățile cărora se găsesc montate două bile avînd aceeași greutate. În lungul arborelui Oy poate culisa un manșon M, legat de barele OA și OB prin intermediul barelor CE și DE. Prin intermediul unui sistem de pîrghii MH și HI, manșonul M acționează asupra supapei S de admitere a aburului în cilindru. Cînd viteza unghiulară ω_1 a arborelui conducător al mașinii crește, bilele A și B se depărtează de arborele regulatorului, datorită forțelor centrifuge ale bilelor; în același timp, manșonul M se ridică închizînd supapa S de admitere a aburului. Invers, cînd viteza unghiulară ω_1 scade, supapa S se deschide mărind admisia aburului.

Regulatorul lui Rankine. Schema acestui regulator este arătată în figura 13.8. El este format dintr-un mecanism cu două articulații O și O', fixat pe arborele regulatorului. În punctele A și A_1 se află cîte o bilă de greutate P, iar în B și B_1 cîte o bilă de greutate Q. În C și D se află două manșoane care alunecă în lungul barelor OA și OA_1, iar în E se află un manșon care alunecă în lungul arborelui regulatorului și acționează asupra supapei de admisie a aburului.

d) **Frîna.** Pentru încetinirea mersului unei mașini (în special în caz de ambalare), pentru oprirea mașinilor sau pentru securitatea muncii (prevenirea accidentelor), mașinile sînt prevăzute cu un dispozitiv denumit *frînă.* Frîna poate fi acționată în diferite moduri : manual, mecanic, electric, pneumatic, hidraulic. În figura 13.9 sînt arătate două tipuri de frînă, și anume : o frînă cu sabot (fig. 13.9, *a*) și o frînă cu bandă (fig. 13.9, *b*).

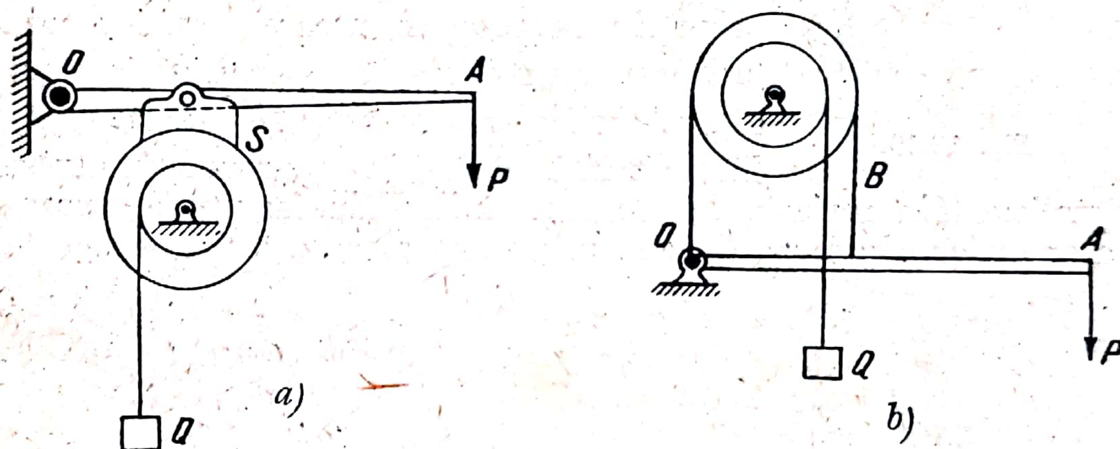


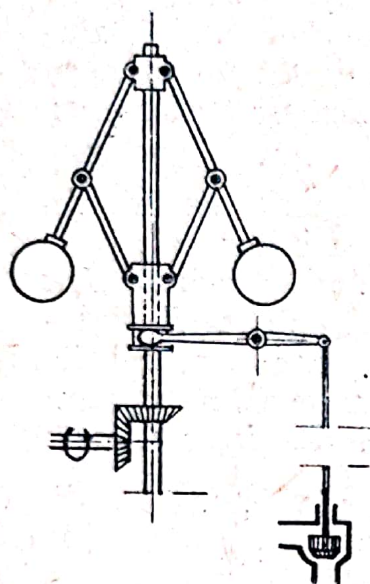
Fig. 13.9.

Prin acționarea pîrghiei OA, forța P este transmisă în primul caz sabotului S, iar în cel de-al doilea caz benzii B, care prin contact cu un tambur de frînă îi încetinește mersul datorită forțelorce iau naștere între sabot, respectiv banda de frînă și tambur.

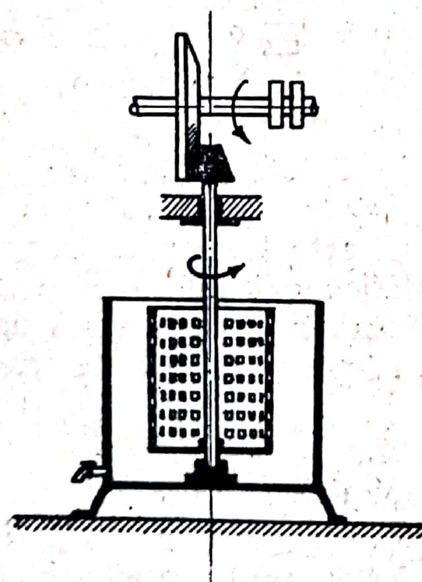
6. Forța de inerție în tehnică

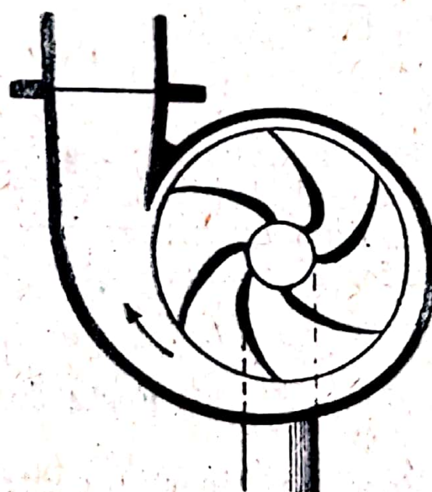
Forța de inerție centrifugă are foarte multe aplicații în tehnică : astfel, pe baza forței centrifuge s-au construit o serie de aparate și mașini și s-au imaginat procedee tehnologice de elaborare a unei serii de piese folosite în construcția mecanismelor și a mașinilor. Vom descrie în cele ce urmează cîteva asemenea aparate.

a) **Regulatorul centrifugal** este un dispozitiv întrebuinţat la reglarea admisiei aburilor într-o maşină sau turbină cu abur. Prin varierea vitezei de rotaţie, bilele regulatorului se apropie cînd viteza scade sau se depărtează cînd viteza creşte, deschizînd în primul caz şi închizînd în cel de-al doilea admisia aburului. Două tipuri de regulatoare au fost descrise mai sus. În figura 13. 10 este arătat un regulator centrifugal care acţionează direct admisia aburului.


Fig. 13.10.

b) **Uscătoarele şi separatoarele centrifuge** sînt aparate compuse în principiu dintr-un cilindru găurit, care se roteşte cu viteză foarte mare în interiorul unei cuve (fig. 13.11). Aparatele bazate pe acest principiu servesc la uscarea rufelor ude (un asemenea aparat este montat la unul din tipurile de maşini de spălat rufe fabricat în R.P.R.), la separarea zahărului cristalizat din melasă, la scoaterea mierii din fagure, la separarea serurilor din sînge, în general la separarea a două lichide de


Fig. 13.11.


Fig. 13.12.

densităţi diferite, la eliminarea particulelor în suspensie dintr-un lichid (de exemplu clarificarea vinurilor, epurarea uleiurilor etc.).

c) **Ventilatoarele şi pompele centrifuge** sînt maşini compuse dintr-un ax mobil, avînd montat la periferia sa o serie de palete profilate ca în figura 13.12 şi închise într-un corp de

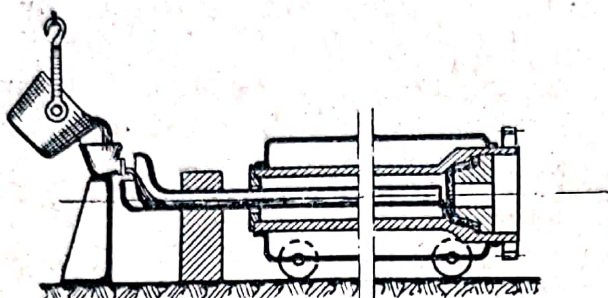


Fig. 13.13.

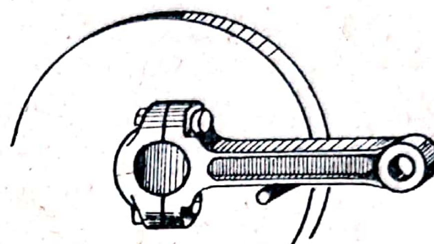


Fig. 13.14.

pompă. Cînd corpul de pompă este plin cu apă, se porneşte pompa; axul cu palete începe să se rotească cu viteză mare, antrenînd lichidul pe care-l aruncă la periferie, formînd o depresiune în centrul roţii, fapt care provoacă urcarea lichidului în conducta de aspiraţie. Ventilatorul centrifugal funcţionează pe acelaşi principiu, fluidul aspirat fiind însă aer sau un alt gaz.

d) **Turnarea centrifugală** constituie unul dintre procedeele de fabricaţie al conductelor de fontă, care permite să se obţină produse foarte omogene (fig. 13.13). Prin rotirea formei care este răcită la exterior cu o cămaşă de apă, materialul topit este proiectat pe partea interioară a formei, unde se dispune după pereţii acesteia. Printr-un procedeu asemănător se reglează şi bielele motoarelor prin stîngere între două platouri care se rotesc cu o turaţie de 900—1 000 rot/min (fig. 13.14).

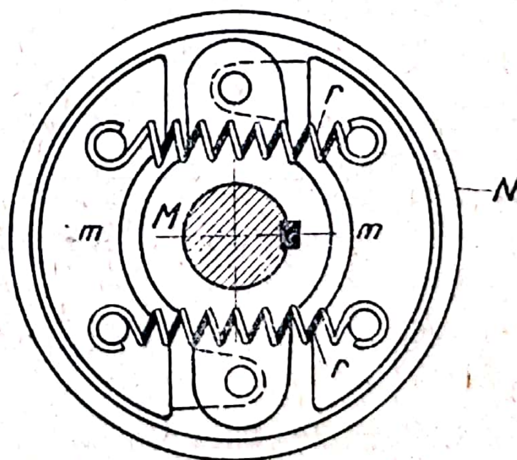


Fig. 13.15.

e) **Ambreiajele automate centrifugale** (fig. 13.15) se compun dintru-un manşon *M* calat pe arborele motor, două mase *m* articulate pe manşonul *M*, două resoarte *r* şi un ax *N*, solidar cu mecanismul care trebuie antrenat. Cînd viteza motorului creşte, masele *m*, sub acţiunea forţelor centrifuge, se depărtează din poziţia din figura 13.15 şi vin în contact cu partea interioară

a axului N. Antrenarea arborelui N are loc progresiv, fără șocuri. Cînd turația arborelui motor M scade, forțele centrifuge devin mai mici, astfel încît efectul lor este învins de forța elastică a resoartelor și se produce debreiajul.

f) **Înfășurările roților mașinilor electrice** sînt protejate împotriva smulgerii lor din lăcaș datorită forțelor de inerție centrifuge cu ajutorul unor bucăți de carton montate între două praguri ale rotorului (fig. 13.16).

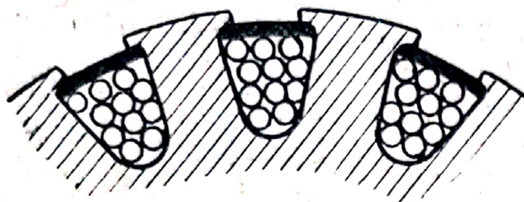


Fig. 13.16.

g) **Turnarea centrifugală a stîlpilor de beton armat** folosiți în construcția liniilor electrice aeriene constituie un procedeu al tehnicii noi care duce la economisirea a mii de tone de metal.

Fabricația acestor stîlpi a început la noi în țară în anul 1953, la atelierele „Titan" ale Întreprinderii de construcții metalice și prefabricate nr. 7 din București.

În prezent se experimentează la aceeași întreprindere execuția stîlpilor de beton centrifugat precomprimat.

Construcția liniilor aeriene pentru dezvoltarea rețelei energetice de la noi, din țară, pe baza Directivelor Congresului al III-lea al P.M.R., prevede ca în cursul anului 1965 să se livreze 50 000 de asemenea stîlpi.

Capitolul XIV

DIMENSIUNILE ȘI UNITĂȚILE DE MĂSURĂ ALE MĂRIMILOR MECANICE

1. Mărime fizică; măsurare

Diferitele stări ale materiei sînt caracterizate printr-o serie de mărimi fizice determinate, între care se stabilesc o serie de legi; pentru stabilirea acestor legi este necesară măsurarea mărimilor fizice.

A măsura o mărime fizică oarecare A înseamnă a o compara cu o altă mărime U de aceeași natură cu mărimea de mă-

surat şi care este aleasă ca termen de comparaţie; mărimea U poartă numele de *unitate de măsură.*

Rezultatul măsurătorii este un număr n, care arată de cîte ori unitatea de măsură U se cuprinde în mărimea A, adică:

$$n = \frac{A}{U}. \tag{14.1}$$

Numărul n se numeşte *valoarea numerică* a mărimii A sau *măsura* mărimii. Mărimea fizică măsurată se exprimă sub forma unui produs dintre valoarea numerică şi unitatea de măsură:

$$A = nU, \tag{14.2}$$

adică:

mărimea de măsurat = valoarea numerică × unitatea.
Aceasta este ecuaţia fundamentală a măsurării.

Măsurile se execută experimental cu ajutorul unor instrumente, denumite *aparate de măsurat,* care servesc la compararea mărimii de măsurat cu unitatea de măsură, în limitele unor anumite erori datorite metodeti sau aparatului de măsurat folosit.

2. Mărimi şi unităţi fundamentale şi derivate; sisteme de unităţi

Deoarece diferitele mărimi fizice sînt legate între ele prin anumite relaţii, nu este nevoie să alegem pentru fiecare mărime cîte o unitate, aşa cum ar rezulta din cele de mai sus. De aceea vom alege o serie de mărimi fizice pe care le vom denumi *mărimi fundamentale,* iar unităţile lor de măsură *unităţi fundamentale,* iar restul mărimilor fizice deduse din cele fundamentale pe baza relaţiilor care le leagă de acestea le vom denumi *mărimi derivate* şi unităţile lor, *unităţi derivate.* Mărimile fundamentale se aleg astfel încît să fie independente între ele.

Mărimile fundamentale alese pentru un anumit domeniu de măsurare formează sistemul fundamental de măsură, iar mărimile derivate formează sistemul de unităţi.

În *sistemele fizice* folosite în mecanică se aleg drept mărimi fundamentale lungimea (L), masa (M) şi timpul (T), iar în cele *tehnice* lungimea (L), forţa (F) şi timpul (T).

Mărimile şi unităţile fundamentale de măsură ale diferitelor sisteme sînt arătate în tabela 14.1.

Tabela 14.1

Mărimi şi unităţi fundamentale de măsuri

Sisteme	Unităţi de măsură folosite				Denumiri secundare
Sisteme fizice	Denumire	L	M	T	—
	CGS	1 cm	1 g (m)	1 s	Sistem fizic
	MKS	1 m	1 kg (m)	1 s	Sistem fizic practic
	MTS	1 m	1 t (m)	1 s	Sistem fizic industrial
Sisteme tehnice	Denumire	L	F	T	—
	MKfS	1 m	1 kgf	1 s	—

3. Dimensiunea unei mărimi

Pentru a putea calcula valoarea numerică a unei mărimi la trecerea de la un sistem de unităţi la altul, trebuie alcătuită aşa-numita *ecuaţie de dimensiuni* a mărimii respective. Ea este o relaţie care se exprimă prin produsul unităţilor fundamentale ridicate la diferite puteri α, β, γ:

$$[A] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}, \tag{14.3}$$

$[A]$ reprezentînd dimensiunea mărimii A.

Exemplu: Dimensiunea vitezei este:

$$[v] = \frac{L}{T},$$

deoarece ea este un raport de lungime şi timp. Ca s-o aducem la forma (14.3) o scriem astfel:

$$[v] = L^{1} T^{-1} M^{0},$$

deci ea este un caz particular al formei (14.3) pentru:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0;$$

ele reprezintă dimensiunile mărimii v.

4. Omogenitatea

Legile fizice exprimă în general egalități între mărimi fizice. Principiul omogenității afirmă că orice egalitate între mărimi fizice are sens numai atunci cînd dimensiunile termenilor care intervin în egalitate sînt aceleași.

Exemplu. Să considerăm formula perioadei pendulului:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{14.4}$$

Deoarece numărul 2 π este adimensional avem:

$$[t] = \left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right]$$

t este un timp, *l* o lungime, iar *g* o accelerație; cum accelerația este o mărime derivată în sistemul LMT, va trebui s-o exprimăm în funcție de mărimile fundamentale; avem

$$[g] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2},$$

iar pentru celelalte două mărimi:

$$[t] = T, \ [l] = L.$$

Înlocuind în relația (14.4) obținem:

$$T = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T.$$

5. Unități fundamentale ale sistemelor generale

a) **Unități de lungime.** În sistemul MKS, unitatea fundamentală de lungime este metru (m). Metrul este lungimea, la temperatura de 0 °C, a prototipului internațional de platină iridiată, aprobat în 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți, și păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sèvres — Franța.

În R.P.R. servește ca etalon național prototipul nr. 6 *c*, atribuit în acest scop în 1895 de Conferința Generală de Mă-

Tabela 14.2

Unitățile mărimilor geometrice și mecanice

Mărimea	Simbol	Ecuația de definiție	Dimensiuni în sistemul		Unități în sistemul		
			LMT	LFT	CGS	MKS	MKfS
Lungime	l	—	L	L	cm	m	m
Masă	m	$m = \frac{F}{a}$	M	$L^{-1}FT^{2}$	g	kg	$\frac{kgf \cdot s^2}{m} = \mu$
Timp	t	—	T	T	s	s	s
Arie	A	$A = l^2$	L^2	L^2	cm^2	m^2	m^2
Volum	V	$V = l^3$	L^3	L^3	cm^3	m^3	m^3
Unghi plan	θ	$\theta = \frac{s}{r}$	1	1	rad	rad	rad
Viteză	v	$v = \frac{s}{t}$	LT^{-1}	LT^{-1}	cm/s	m/s	m/s
Accelerație	a	$a = \frac{v}{t}$	LT^{-2}	LT^{-2}	cm/s^2	m/s^2	m/s^2
Viteză unghiulară	ω	$\omega = \frac{\theta}{t}$	T^{-1}	T^{-1}	rad/s	rad/s	rad/s
Accelerație unghiulară	ε	$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$	T^{-2}	T^{-2}	rad/s^2	rad/s^2	rad/s^2
Perioadă	T	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	T	T	s	s	s

Frecvență	f	$f = \frac{1}{T}$	T^{-1}	T^{-1}	Hz	Hz	Hz
Forță	F	$F = ma$**	LMT^{-2}	F	dyn	N	kgf
Percusiune	P	$P = Ft$	LMT^{-1}	FT	dyn · s	N · s	kgf · s
Momentul unei forțe (cuplu)	M	$M = Fl$	L^2MT^{-2}	LF	dyn · cm	N · m	kgf · m
Impuls (cantitate de mișcare)	H	$H = mv$	LMT^{-1}	FT	$\frac{g \cdot cm}{s}$	$\frac{kg \cdot m}{s}$	$\frac{u \cdot m}{s}$
Energie	W, E	$E = \frac{1}{2} mv^2$	L^2MT^{-2}	LF	erg	J	kgm
Lucru mecanic	W, L	$L = Fl \cos(F, l)$	L^2MT^{-2}	LF	erg	J	kgm
Putere	P	$P = \frac{L}{t}$	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	erg/s	W	kgm/s
Moment de inerție al masei	J	$J = ml^2$	L^2M	LFT^2	g · cm²	kg · m²	u · m²
Moment cinetic	K	$K = mvr = J\omega$	L^2MT^{-1}	LFT	$\frac{g \cdot cm^2}{s}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s}$	$\frac{u \cdot m^2}{s}$
Presiune	p	$p = \frac{F}{A}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	dyn/cm²	N/m²	kgf/m²
Masă specifică, densitate	ρ	$\rho = \frac{m^{**}}{V}$	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	g/cm³	kg/m³	kgf · s²/m⁴
Greutatea specifică	γ	$\gamma = \frac{G}{V}$	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$	dyn/cm³	N/m³	kgf/m³

* Definiția în sistemul MKS
** Definiția în sistemul MKS și CGS

suri şi Greutăţi. El se află în păstrarea Direcţiei Generale pentru Metrologie, Standarde şi Invenţii.

În sistemul CGS : centrimetrul (cm) este a suta parte din metrul definit mai sus.

b) **Unităţile de masă.** În sistemul MKS, unitatea de masă este kilogramul (kg). Kilogramul este masa prototipului internaţional de platină iridiată, aprobat în anul 1889 de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi şi păstrat la Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi din Sèvres — Franţa.

În R.P.R. serveşte ca etalon naţional prototipul nr. 2, artibuit în acest scop de Conferinţa Generală de Măsură şi Greutăţi din 1889. El se află în păstrarea Direcţiei Generale pentru Metrologie, Standarde şi Invenţii.

În sistemul CGS : gramul (masă) este 1/1 000 din kg (masă) definit mai sus.

c) **Unitatea de timp.** În toate sistemele, unitatea fundamentală de timp este secunda (s). Secunda (de timp mijlociu) reprezintă a 86 400-a parte a zilei solare mijlocii.

Anul tropic (adică intervalul mijlociu dintre două treceri consecutive ale Soarelui în punctul echinoxial mijlociu de primăvară) are 365,24219879 zile solare mijlocii.

Ora standard şi implicit secunda sînt determinate de Biroul Internaţional al Orei din Paris.

Conservarea şi difuzarea orei în R.P.R. este în sarcina Observatorului Astronomic din Bucureşti.

d) **Unitatea de forţă este kilogramul-forţă (kgf).** Kilogramul-forţă este forţa a cărei valoare este egală cu greutatea prototipului internaţional de masă, definit mai sus, măsurat în vid, la acceleraţia normală a gravitaţiei de 9,80665 m/s^2.

În afară de unităţile fundamentale definite mai sus, mai sînt şi unităţile derivate, dependente de sistemul ales. Pentru unităţile fundamentale şi unităţile derivate s-a întocmit tabela 14.2.

6. Aplicaţii

1. Să se exprime în sistemul de unităţi tehnic, fizic (CGS) şi practic (MKS) masa şi greutatea unei sfere pline de fier de rază $r = 30$ cm şi densitate $\rho = 7,8$ g/cm^3.

R e z o l v a r e

Notînd cu M masa și G greutatea :

$M = V\gamma = \frac{4}{3}\pi(30)^3\ 7{,}8 \approx 882\,000$ grame masă (CGS)

$M = 882$ kg (MKS) $= \frac{882}{9{,}81} = 90$ (unități tehnice de masă)

$G = Mg = 882\,000 \times 981 \approx 8\,650 \times 10$ dine (dyn)

$G = 8\,650$ newton (N)

$G = 882$ kilograme-forță (kgf).

2. Să se determine în kgf/s, erg/s, kW și CP puterea unei locomotive ce înaintează cu viteza $v = 60$ km/h și produce o forță de tracțiune $T = 8\,000$ kgf.

R e z o l v a r e

Puterea P cerută este :

$P = T \times v = 8\,000 \times \frac{60}{36} = 1333\,300$ kgfm/s

$P = 133\,300 \times 9{,}81 = 1\,307\,700$ W $= 1\,307{,}7$ kW

$P = 1\,307{,}7 \times 10^{10}$ erg/s

$P = 1\,307{,}7 \times 1{,}36 = 1\,777$ CP.

TABLA DE MATERII

Partea I

Generalități

Partea a II-a

Statica sistemelor materiale

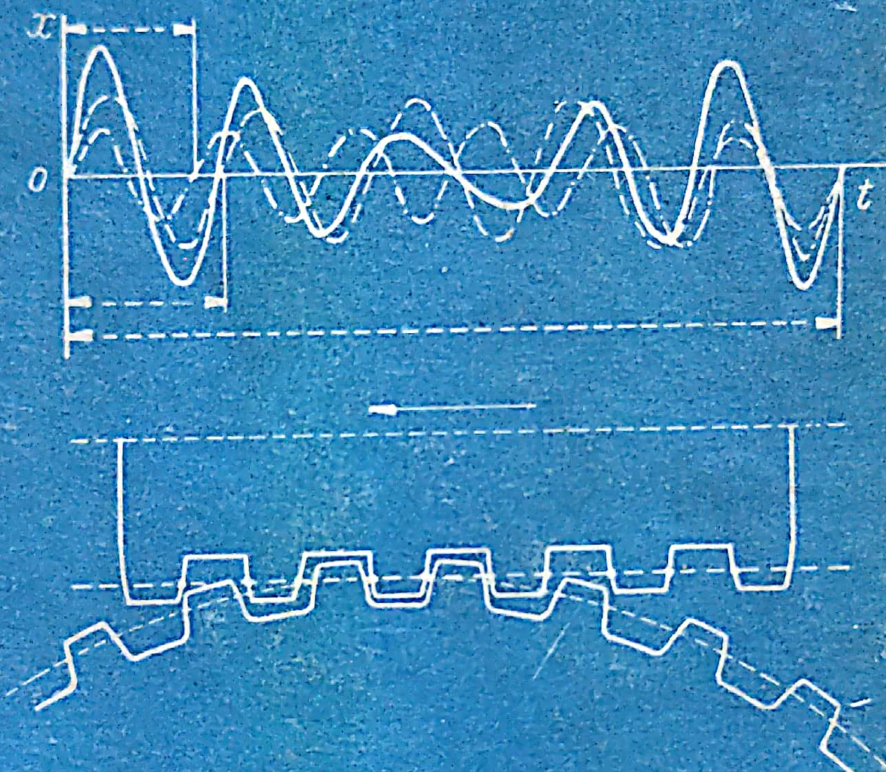
Partea a IV-a

Dinamica sistemelor materiale

Redactor responsabil: Ing. Munteanu Delia.
Tehnoredactor: Gaspar Paraschiva

Dat la cules: 28. 09. 62. Bun de tipar: 20. 04. 63. Apărut: 1963. Tiraj: 4500+120 Leg ½ pînză. Hîrtie: scris tip II-a 63 g/m², 16/61×86. Coli editoriale: 17,348 Coli de tipar: 20,25. A: 02402. C.Z. pentru bibliotecile mari: 621. 01(075.36). C.Z. pentru bibliotecile mici: 621.

Întreprinderea Poligrafică Cluj. Str. Brassai nr. 5—7
10.354/1962



Prețul cărții = 7,30 lei
Prețul legătoriei = 2,— lei

Total = 9,30 lei